

VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta strojní
Institut dopravy

Tvorba destinačního portfolia leteckého dopravce
Destination Portfolio Of Air Company Creating

Student: Bc. Tomasz Jelen
Vedoucí diplomové práce: Ing. Dušan Teichmann, Ph.D.

Ostrava 2015

Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Tomasz Jelen**
Studijní program: N2301 Strojní inženýrství
Studijní obor: 2301T003 Dopravní technika a technologie
Specializace: 40 Letecká doprava
Téma: **Tvorba destinačního portfolia leteckého dopravce**
Destination Portfolio of Air Company Creating

Zásady pro vypracování:

1. Úvod - motivace k řešení úlohy.
2. Faktory ovlivňující tvorbu sítě linek leteckého dopravce.
3. Teoretická východiska řešení - charakteristika existujících přístupů k řešení.
4. Případová studie - aplikace vybraného teoretického přístupu v podmínkách konkrétního (modelového) případu.
5. Zhodnocení dosažených výsledků.
6. Závěr.

Seznam doporučené odborné literatury:

Černý, J.; Kluvánek, P.. Základy matematické teorie dopravy. Bratislava: VEDA, 1990. ISBN 80-224-0099-9

Průša, J. a kolektiv. Svět letecké dopravy. Praha: Galileo CEE Service ČR, 2007. 315 s. ISBN 978-80-239-9206-9

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **Ing. Dušan Teichmann, Ph.D.**

Datum zadání: 13.12.2014

Datum odevzdání: 18.05.2015



doc. Ing. Aleš Slíva, Ph.D.
vedoucí katedry

doc. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.
děkan fakulty

Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě: 18.5.2015

Tomasz Jelen

podpis studenta

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na moji diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě diplomovou práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že diplomová práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – diplomovou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě: 18.5.2015

Tomasz Jelen

podpis studenta

Jméno a příjmení autora práce:

Tomasz Jelen

Adresa trvalého pobytu autora práce:

Modřínová 89,

Dolní Těrlicko 73542

PODĚKOVÁNÍ

Chtěl bych velmi poděkovat svému vedoucímu diplomové práce, panu Ing. Dušanovi Teichmannovi, Ph.D., za ochotu a pomoc při tvorbě matematických modelů a také za jeho odborný dohled.

ANOTACE DIPLOMOVÉ PRÁCE

JELÉN, T. Tvorba destinačního portfolia leteckého dopravce: Diplomová práce. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Ústav letecké dopravy, 2015, 67 s. Vedoucí práce: Teichmann, D.

Tato diplomová práce se zabývá tvorbou sítě linek a letového řádu leteckého dopravce. První část práce se věnuje popisu sítě linek, přístupu k jejich tvorbě z hlediska leteckých společností a faktorům, které tvorbu letového řádu ovlivňují. Dále následuje návrh teoretického přístupu v podobě dvou variant matematických modelů a studie výpočetních časů v závislosti na rozsahu úlohy. Závěr práce je zaměřen na zhodnocení dosažených výsledků z modelů a jejich porovnání.

ANNOTATION OF DIPLOMA THESIS

JELÉN, T. Destination Portfolio Of Air Company Creating: Diploma Thesis. Ostrava: VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Air Transport, 2015, 67 s. Thesis head: Teichmann, D

The thesis deals with the creation of airline network and flight schedule of the airline carrier. The first part describes the airline network and its creation from the viewpoint of the airline companies, and factors affecting the flight schedule creation. The theoretical approach in the form of two variants of mathematical models is proposed. The next part of the thesis is focused on the study of calculation times depending on the scope of the task. The final part is aimed at the evaluation and comparison of the results achieved.

Obsah

Seznam zkratek	9
1 Úvod	11
2 Charakteristika tvorby letového řádu	12
2.1 Síť leteckých linek	12
2.1.1 Síť point-to-point	13
2.1.2 Síť typu Hub and Spoke.....	14
2.2 Tvorba sítě linek.....	16
2.2.1 Strategické plánování.....	18
2.2.2 Taktické plánování.....	19
2.2.3 Fáze vývoje sítě	20
2.3 Letecké společnosti a jejich strategie při tvorbě sítě.....	20
2.3.1 Dělení podle délky přepravy a charakteru sítě.....	21
2.3.2 Dělení na zahraniční a vnitrostátní dopravce.....	21
2.3.3 Dělení podle principu nabídky a prodeje přepravních kapacit	22
2.3.4 Dělení podle charakteru nabízeného produktu	23
2.3.5 Dělení podle charakteru obchodního vytížení	24
2.4 Optimální vyžití letadlového parku.....	25
2.5 Struktura letadlového parku	27
2.5.1 Dělení letadel podle typů pohonných jednotek:	27
2.5.2 Dělení letadel z hlediska kapacity a doletu.....	28
2.5.3 Dělení podle šířky trupu	28
3 Návrh matematického modelu.....	30
3.1 Existující přístupy k řešení.....	30
3.2 Model varianta 1	30
3.2.1 Formulace problému	30
3.2.2 Řešení.....	31
3.2.3 Rekapitulace konstant	32

3.2.4	Matematický model	33
3.3	Model varianta 2	36
3.3.1	Formulace problému	36
3.3.2	Rekapitulace konstant	36
3.3.3	Matematický model	38
4	Výpočetní experimenty	40
4.1	Modelový příklad	40
4.2	Optimalizační software Xpress-IVE	44
4.2.1	Transformace úlohy do programovacího jazyka MOSEL	45
4.3	Řešení příkladu pomocí modelu č. 1	48
4.3.1	Zápis modelu č. 1 v programu Xpress-IVE	48
4.3.2	Výstupy z modelu	51
4.3.3	Interpretace výsledů	52
4.4	Řešení příkladu pomocí modelu č. 2	52
4.4.1	Zápis modelu č. 2 v programu Xpress-IVE	52
4.4.2	Výstupy z modelu	55
4.4.3	Interpretace výsledů	56
4.5	Studie výpočetního času v závislosti na rozsahu úlohy	57
4.5.1	Interpretace výsledků studie	63
5	Závěr	64
	Použitá literatura	65
	Seznam obrázků, tabulek a grafů	66

Seznam zkratek

Zkratka	Význam
a	prohibitivní konstanta
b_{ij}	incidenční matice modelující možnou návaznost spoje $i \in J$ na spoj $j \in J$
c_l	kapacita letadla $l \in L$
D	poptávka
d_j	poptávka po spoji $j \in J$
GDS	globální distribuční systém
J	výchozí množina spojů
\bar{J}	množina spojů vybraných k obsluze (tvořících letový řád)
K	množina časových intervalů
L	množina letadel leteckého dopravce
M	prohibitivní konstanta
m	celkový počet časových period $ K = m$
$MIDT$	Marketing Information Data Transfer
n	celkový počet spojů $ J = n$
OAG	Official Airline Guide
p_j	poplatek za prostoj na letišti před započítáním obsluhy spoje $j \in J$
r_{jl}	využití letadla $l \in L$ pokud bude nasazeno na spoj $j \in J$
T_i	doba letu spoje $i \in J$
T_{ij}	doba letu spoje $i \in J$ před obsluhou spoje $j \in J$
t_i	nejdříve možný čas odletu spoje $i \in J$
t_{ij}	doba přesunu mezi spojem $i \in J$ a $j \in J$
t_j^a	minimální čas potřebný k obratu letadla před započítáním obsluhy spoje $j \in J$
t_i^{max}	maximální dovolený posun spoje $i \in J$
$u_{j,l}$	začátek oběhu letadla $l \in L$ s obsluhou spoje $j \in J$

$v_{j,l}$	ukončení oběhu letadla $l \in L$ po obsluze spoje $j \in J$
x_{ijl}	nasazení letadla $l \in L$ po obsluze spoje $i \in J$ na spoj $j \in J$
y_{jl}	počet neobsazených míst v letadle $l \in L$, pokud bude nasazeno k obsluze spoje $j \in J$
z_i	časový posun spoje $i \in J$

1 Úvod

V dnešní době, kdy je konkurence v letecké dopravě na vysoké úrovni a trh je přesycen nespočtem dopravců, je pro leteckou společnost velmi důležité mít konkurenceschopný letový plán, který zajistí nejen co nejlepší využití letadlového parku, ale bude především i atraktivní pro cestující. Letový plán je základním stavebním prvkem každé letecké společnosti, neboť představuje způsob, prostřednictvím něhož letecká společnost nabízí své služby.

Předložená diplomová práce je rozdělena do dvou částí. První část představuje přehled přístupů leteckých dopravců k tvorbě sítě linek a informace týkající se letového řádu. V další, klíčové, části diplomové práce jsou prezentovány dva přístupy k tvorbě efektivního letového řádu, oba založené na lineárních optimalizačních matematických modelech. Optimalizační úlohy mají za úkol nalézt nejlepší možná řešení pomocí účelové funkce, která může nabývat minimálních nebo maximálních hodnot. Následně je ověřena jejich funkčnost na základě modelových dat. Závěr práce je věnován interpretaci výsledků obou modelů a jejich vzájemnému porovnání.

Tvorba matematického modelu pro návrh optimálního letového řádu je také hlavním cílem předložené diplomové práce. Klíčové z hlediska tvorby letového řádu je, aby matematický model při návrhu sítě leteckých spojů a jejich časových poloh využíval informace o poptávce a při návrhu letového řádu zohledňoval možnosti letadlové flotily. Vedlejším, ale z optimalizačního hlediska neméně důležitým cílem je provést posouzení vlivu velikosti úlohy na výpočetní čas potřebný k vyřešení navržených modelů.

2 Charakteristika tvorby letového řádu

2.1 Síť leteckých linek

Text v této kapitole vychází z literatury [4] a [7]

Síť linek si lze představit jako prostorové znázornění destinací s příslušnými lety nabízenými leteckým dopravcem. Síť je tvořena uzly a úseky, které chce letecká společnost obsluhovat, přičemž uzly zastupují konkrétní letiště a úseky reprezentují spojení mezi nimi. Je to tedy systém, prostřednictvím kterého dopravce realizuje svou nabídku za účelem obsluhy cestujících a následně tvorby zisku.

Tvar sítě linek představuje způsob propojení letišť. Jinými slovy, problematika tvorby sítě linek se zabývá nalezením optimální struktury sítě a optimálních cest pro přepravu cestujících při co možná nejnižších celkových přepravních nákladech. V první řadě je tedy potřeba určit dvojice destinací, které chce letecký dopravce obsluhovat a následně stanovit tvar sítě. Jednotlivé destinace lze mezi sebou propojit buď přímými lety, tedy jednoetapově, nebo pomocí přípojných letů, které přepravu mezi dvěma místy dekomponují na více fází. Na základě sítě linek se zpravidla následně vytvoří letový řád, to znamená seznam časů odletů a příletů spojů, četnosti spojů a jejich časové rozložení na daných trasách a přiřazení konkrétních letadel navržené množině spojů. Rychlost spojení a také přepravní kapacitu můžeme ovlivnit typem letadla. Samotné trasy v síti lze z hlediska doby letu potřebné k jejich obslužení rozdělit následovně:

- a) **krátké tratě** (Short-haul flight): do 3 hodin letu,
- b) **střední tratě** (Medium-haul flight): od 3 do 6 hodin,
- c) **dlouhé tratě** (Long-haul flight): od 6 do 12 hodin letu,
- d) **velmi dlouhé tratě** (Ultra long-haul flight): nad 12 hodin.

Existuje několik tvarů sítě linek, ale v zásadě je lze rozdělit do dvou základních kategorií: síť typu point-to-point a síť typu hub and spoke. Každá z nich může být pro konkrétního dopravce optimální, záleží to především na jeho obchodní strategii. Klasičtí dopravci provozují síť typu hub and spoke, nízkonákladové společnosti volí spíše síť point-to-point.

Dále budou v textu práce jednotlivé typy sítí popsány a budou zmíněny jejich základní výhody a nevýhody.

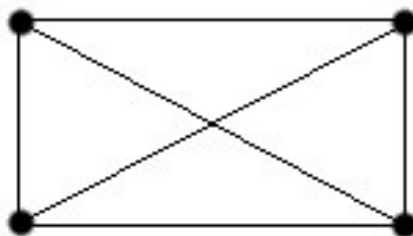
2.1.1 Sít' point-to-point

Někdy také označována jako liniová sít'. Jak název napovídá, jde o přepravu z bodu do bodu. Pro tento typ přepravy je typická absence navazujících spojů, jedná se tedy pouze o přímou přepravu bez mezipřistání. Obrázek 1 reprezentuje liniovou sít' se čtyřmi letišti.



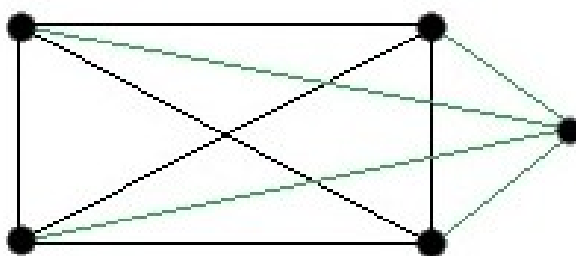
Obrázek 1: Sít' typu point-to-point

V doslovném pojetí významu point-to-point by existovaly trasy mezi všemi destinacemi v síti. To však z praktického hlediska nemusí být vždy výhodné, a proto se do sítě zařazují pouze spojení, která jsou pro leteckého dopravce optimální. V případě propojení všech letišť mezi sebou by s každou další destinací zařazenou do sítě výrazně rostl počet potřebných spojení. Ten lze určit pomocí vzorce $\frac{n \times (n-1)}{2}$, kde n představuje počet destinací v síti. Pokud by tedy dopravce plánoval propojit 4 letiště, potřeboval by k obsluze všech míst 6 linek, jak demonstruje následující obrázek 2.



Obrázek 2: Sít' point-to-point se 4 destinacemi

S přidáním dalšího letiště v síti by pak již bylo zapotřebí 10 linek (6 stávajících + 4 nové), atd.



Obrázek 3: Sít' point-to-point s 5 destinacemi

Je tedy zřejmé, že při větším počtu destinací v síti by bylo velmi náročné podle tohoto schématu obsluhovat všechna spojení ať již z důvodu omezených finančních i provozních možností dopravce (ohraničený počet letadel a personálu) nebo rozmělnění přepravních proudů.

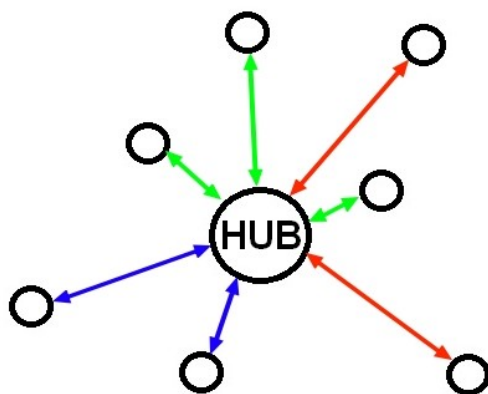
Liniovou síť využívají zejména nízkonákladoví dopravci. Je vhodná v situacích, kdy je menší vzdálenost mezi destinacemi a poptávka po spojích je velká. Vysoká poptávka následně kompenzuje nízké ceny low-cost dopravců. Přeprava point-to-point se vyznačuje těmito výhodami:

- Spolehlivost letového řádu – díky absenci přípojných spojů nejsou jednotlivé lety na sobě závislé a nemůže tedy dojít k tzv. dominovému efektu, kdy zpoždění jednoho letu ovlivní další spoje. Tato síť tedy nabízí přesnější odlety spojů.
- Vyšší využití letadel – lety nejsou primárně určeny k tomu, aby pouze svázely cestující na přípojně spoje, a lze tak dosáhnout většího využití jednotlivých letadel.
- Krátká přepravní doba.

Tyto výhody jsou však za cenu většího počtu linek jak již bylo zmíněno a také nižší frekvence letů v průběhu dne následkem přímých spojení.

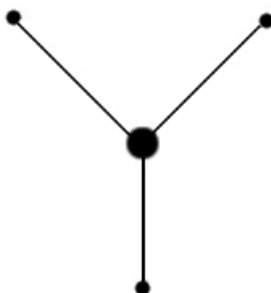
2.1.2 Síť typu Hub and Spoke

Tato síť je tvořena hlavním letištěm, tzv. hubem, který představuje přestupní bod mezi přípojnými linkami v podobě paprsků – spokes. Využívají ji klasické letecké společnosti, které prostřednictvím transferového letiště obsluhují regionální destinace s menší poptávkou. Je vhodná v případě větších vzdáleností a umožňuje obsluhu více destinací. Síť typu Hub and Spoke je znázorněná na Obrázek 4.



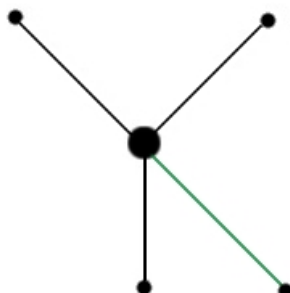
Obrázek 4: Síť typu Hub and Spoke

V případě této sítě je značně snížen počet linek potřebných k obsluze všech destinací. Celkový počet provozovaných leteckých linek se určí podle vzorce $n - 1$, kde n vyjadřuje počet obsluhovaných destinací. Chce-li tedy letecký dopravce propojit 4 letiště, stačí mu k tomu při systému Hub and Spoke pouze 3 linky.



Obrázek 5: Síť Hub and Spoke se 4 destinacemi

Při rozšíření sítě o další destinaci, dojde ke zvýšení počtu linek pouze o jednu, jak je patrné z následujícího obrázku 6.



Obrázek 6: Síť Hub and Spoke s 5 destinacemi



Obrázek 7: Síť linek ČSA z roku 2011 [<http://worldairlinenews.com>]

2.2 Tvorba sítě linek

Text v této kapitole vychází z literatury [1], [2] a [3]

Tvorba sítě linek leteckého dopravce (angl. airline network planning) se zabývá nalezením nejlukrativnějších destinací a jejich následným zapojením do sítě linek tak, aby došlo k maximalizaci zisku leteckého dopravce, popřípadě k minimalizaci ztrát. Většina dopravců chce mít ve své síti ty nejatraktivnější destinace na různých kontinentech, anebo se jí snaží vytvořit z co nejvíce destinací. Oba tyto způsoby však nejsou vždy nejlepším řešením, protože při výběru destinací, které chceme zařadit do sítě, bychom měli vycházet především z poptávky po daných destinacích a ze schopností dopravce obsluhovat tyto poptávky s vhodnou frekvencí spojů. Zařadíme-li do sítě linek příliš velký počet destinací, může dojít k situaci, kdy letecký dopravce, vzhledem k velikosti svého letadlového parku, nebude schopen obsluhovat všechny destinace s dostatečným počtem spojů, bude si nucen pronajímat další letadla, zvyšovat počet létajícího personálu atd. V současné době je linka s menším počtem než sedm letů týdně předem odsouzená k ekonomické neefektivnosti, obzvlášť v tom případě, jedná-li se o dálkové lety [Žihla, 2010]. Před zařazením destinace do sítě linek by měla být provedena důkladná analýza, která vychází z obchodních a provozních faktorů. Letecký dopravce by tedy měl nalézt určitou rovnováhu mezi svými obchodními cíli a operativními možnostmi.

Obchodní faktory ovlivňující tvorbu sítě linek:

- poptávka,
- spojení a počet frekvencí,
- konkurence,
- pravidelnost provozu,
- možnost propagace a podpora prodeje,
- schopnost dosáhnout požadované výnosové výkonnosti.

Poptávkou (zkr.: D z anglického *demand*) se rozumí poptávka po destinacích, tedy množství cestujících, kteří chtějí do dané destinace v určitém intervalu cestovat (poptávka v průběhu dne, týdne,...). Je to jeden z klíčových faktorů, podle kterého se dopravce rozhoduje, zda linku provozovat. Poptávku po destinacích je možné zjistit např. z globálních distribučních systémů, které shromažďují informace o prodaných letenkách prostřednictvím cestovních kanceláří a nebo on-line rezervací. Sdružené informace ze všech GDS se označují jako *MIDT – Marketing Information Data Transfer*, a pro letecké společnosti jsou velmi důležité. Dalšími zdroji informací jsou také různé statistiky poskytující informace o prodeji letenek na konkrétních trzích a *OAG – Official Airline Guide*, organizace, které shromažďují informace o letových řádech většiny dopravců. Konkurence jako obchodní faktor nemusí nutně představovat zápornou roli, může vykonávat i kladnou funkci tím, že dopravci do jeho sítě přepraví cestující odjinud.

Provozní faktory ovlivňující tvorbu sítě linek:

- proveditelnost nabídky letů,
- využití letadlového parku,
- dostupnost posádek,
- spolehlivost v provozu,
- náklady.

Mezi provozními faktory musí dopravce zohlednit například to, zdali je schopen létat podle letového řádu. S tím jsou spojena také kapacitní a provozní omezení letišť a také omezení týkající se služeb řízení letového provozu. Dále by měl v maximální možné míře využít kapacity letadel, tedy dosadit je na taková spojení, na kterých bude jejich kapacita odpovídat velikosti poptávky a brát v úvahu provozně-technická omezení daného letadla v souvislosti s konkrétním letištěm. Každé letadlo má předepsané pravidelné prohlídky. Existuje jich několik od menších a méně časově náročných prohlídek typu A (A-Check),

až po rozsáhlé komplexní prohlídce typu D (D-Check). Intervaly mezi prohlídkami se různí a závisí na typu a stavu letadla. Prohlídky typu A se většinou provádějí jednou týdně (přibližně po 125 letových hodinách), práce trvají několik hodin, a proto se tyto typy prohlídek plánují většinou v noci, kdy bývá letadlo zpravidla odstaveno. Naproti tomu, prohlídky typu D se uskutečňují v delších časových rozestupech, přibližně jednou za šest let, avšak mohou trvat až dva měsíce.

Při plánování sítě je proto důležité dobře znát letadlovou flotilu a její možnosti. Je třeba počítat s tím, že během prohlídek nemůže letadlo vykonávat lety a připravit se na tento stav například umístěním substitučního letadla na dané spoje. Velmi důležitou roli hrají také náklady plynoucí z přiřazení letadla na konkrétní spoj. Jedná se o náklady na pohonné hmoty, posádky, handling a catering, navigační, traťové a letištní poplatky, atd. Potencionální příjmy v dobře navržené síti musí z dlouhodobého hlediska tyto náklady převýšit.

Obchodní a provozní faktory by měly být vůči sobě v rovnováze a vytvořit tak rovnici ziskovosti, která představuje kladný rozdíl mezi výnosy a náklady. Může však nastat i situace, kdy se počítá se záporným hospodářským výsledkem a to v případě, kdy dochází k zavádění nové linky. Hospodářský výsledek většinou kladně ovlivňují i výnosy dopravce z činností pro třetí strany jako je např.: handling, údržba letadel nebo výcvik posádek.

Tvorba sítě linek se nezabývá pouze jedním konkrétním problémem, ale je to proces, který tvoří hned několik dílčích činností. Tento proces se dá rozdělit do dvou fází a těmi jsou strategické a taktické plánování. První fáze vnímá síť linek leteckého dopravce jako celek, který se odvíjí od stavu letadlového parku, výnosů a provozních nákladů. Další fáze se pak již soustředí na poptávku po konkrétním spoji na daném trhu a také vytváří časové polohy jednotlivých spojů, které splňují nároky této poptávky.

2.2.1 Strategické plánování

Strategické plánování hledá odpovědi na otázky typu: kam by se mělo létat, v jaké oblasti by měl dopravce rozvíjet své aktivity, jestli je potřeba vylepšit obsluhu na současných trzích eventuálně, zda svou činnost soustředit na trhy nové nebo jaký je zapotřebí poměr lokálních a přestupujících cestujících. Definuje také tzv. bod zvratu (angl. break even point) a porovnává ho s příjmy ze sítě. Bod zvratu je množství produkce, která je zapotřebí k pokrytí nákladů, v případě leteckého dopravce je to tedy počet cestujících (resp. příjmu plynoucí z nich), při které dojde k pokrytí nákladu na provoz linky.

V neposlední řadě se zabývá možnostmi navázání případných aliancí a výhodami, které z nich plynou.

Strategické plánování se skládá z těchto čtyř činností:

- výstavba a tvorba spojů,
- prognóza poptávky a podílu na trhu,
- definice výnosnosti spojů,
- odhad reakce konkurence.

Úkolem strategického plánování je také rozvíjet a posilovat uzlové body neboli huby. Ty se formují kumulací příletů a odletů v konkrétních časových polohách v průběhu dne s úmyslem posílit místní poptávku o přestupující cestující a tím i zvýšit sedačkové využití letadel a zajistit potřebné množství cestujících pro případné dálkové spoje. Nutnou podmínkou pro dosažení takového stavu je co nejkratší interval mezi přílety a odlety letadel avšak dostatečně dlouhý pro přestup cestujících mezi jednotlivými lety. Podmínka pro krátký časový interval vychází z požadavku cestujících na minimální cestovní dobu, která by se u letu s přestupem měla v maximální možné míře blížit době přímých letů. Čím je cestovní doba letu delší, tím má oproti jiným letům se srovnatelnou cenou horší pozici na prodejní stránce rezervačních systémů. Výjimkou je situace, kdy je dopravce jediný, kdo provozuje linky do dané destinace a cestující tak nemá jinou možnost. V takovém případě si dopravce může dovolit prodloužit dobu přestupu. V ostatních případech je třeba rozhodnout, která spojení letů je dobré rozvíjet a snažit se tedy u takovýchto spojů dobu přestupu minimalizovat.

2.2.2 Taktické plánování

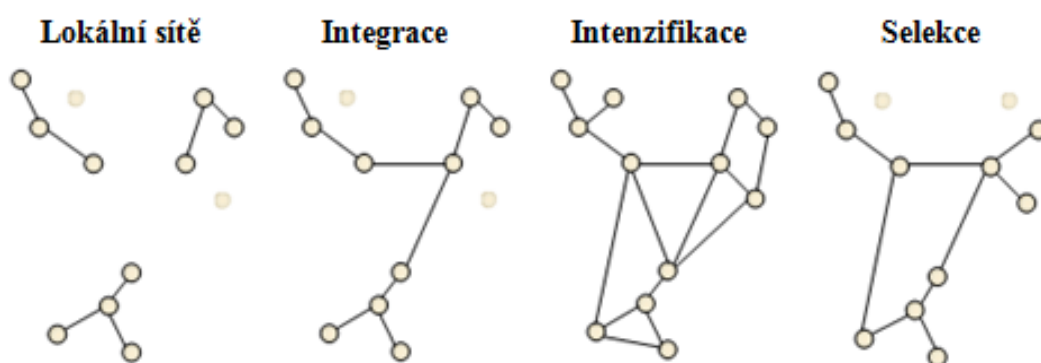
Taktické plánování se zabývá:

- odpovídajícím počtem frekvencí letů a časovým nastavením vzhledem k poptávce,
- maximalizací výnosů,
- minimalizací nákladů,
- maximalizací využití zdrojů.

Pro taktické plánování je nezbytná analýza ziskovosti, která vychází ze současné poptávky, historických dat a struktury nákladu. Rozhodnutí se opírají o skupinu ukazatelů, jež se vypočítají na základě výnosových a nákladových dat dopravce. Nejdůležitějšími ukazateli jsou sedačkové vytížení (Load Factor), tržní podíl (Market Share), průměrný výnos (Yield) atd.

2.2.3 Fáze vývoje sítě

Vytvořit optimální síť, která bude dopravci vyhovovat, není jednorázová záležitost. Většinou je na síť pohlíženo jako na statický prvek, ve skutečnosti má však dynamický charakter a s postupem času se vyvíjí. Literatura [1] rozděluje vývoj sítě z časového hlediska do čtyř fází (viz Obrázek 8). V první fázi existuje několik menších, samostatných lokálních sítí. Ve druhé fázi označenou jako integrace vznikají nové linky, které lokální sítě spojují do jednoho většího celku. Dále následuje fáze intenzifikace, kdy v síti vznikají další spojení, a samotná síť se rozšiřuje. Poslední fází je fáze selekce. Zde dochází k odstranění neefektivních linek a tím vytvoření optimální sítě.



Obrázek 8: Fáze vývoje sítě linek

2.3 Letecké společnosti a jejich strategie při tvorbě sítě

Text v této kapitole vychází z literatury [2] a [7].

Letecký dopravce jakožto provozovatel letecké společnosti je subjekt, který se zabývá poskytováním osobní nebo nákladní letecké dopravy. Realizuje ji za pomoci vlastních nebo pronajatých letadel. Klienty leteckého dopravce jsou jednotlivci, cestovní kanceláře, firmy, podnikatelé aj. Letecká doprava se vyznačuje vysokou mírou konkurenčního prostředí, a proto musí každý letecký dopravce dobře zvážit, jaký charakter služeb bude poskytovat a na tom následně založit svou strategii nejen při tvorbě sítě linek. Existuje několik druhů kritérií, podle nichž můžeme rozdělit letecké dopravce do různých kategorií, které specifikují charakter poskytovaných služeb. Každá kategorie se vyznačuje různým přístupem k tvorbě sítě linek.

2.3.1 Dělení podle délky přepravy a charakteru sítě

- a) **Regionální** – základem sítě u těchto dopravců je jedna větší destinace, která tvoří hub spojující několik menších letišť, nebo obrácená situace, kdy se mateřské letiště nachází na menším regionálním letišti a z něho se odvíjí síť spojů do větších center a jiných menších destinací. Někteří regionální dopravci se hubům vyhýbají úplně a jejich síť představuje spojení mezi několika destinacemi regionálního významu. Taková síť je pak označována jako hub bypass. Regionální letecká společnost může fungovat zcela samostatně, anebo spolupracovat s některým z větších dopravců. Spolupráce pak spočívá v návozu a svozu cestujících do, či ze sítě linek většího partnera a vychází z dohod o franchisingu nebo code-share aj. Flotilu tvoří hlavně letadla s menší kapacitou, ať už turbovrtulová nebo úzkotrupá proudová letadla s krátkým až středním doletem.
- b) **Kontinentální** – soustředí se především na přepravu do více států v rámci jednoho kontinentu, spoje jsou tedy spíše středních vzdáleností. Mateřské letiště mají v jednom z hlavních center daného kontinentu a z něj zajišťují přepravu do dalších hlavních letišť a také větších regionálních center. Aby byli kontinentální dopravci schopni konkurovat i v dálkové přepravě, často spolupracují s dálkovými společnostmi. Partnerství zpravidla poléhá na dohodách o code-share. Ve své flotile mají zahrnutá hlavně proudová letadla s úzkým trupem se střední kapacitou a středním doletem.
- c) **Dálkoví** (mezikontinentální přeprava) – jejich síť obsahuje spoje na velké vzdálenosti mezi kontinenty a také spoje středních vzdáleností, které plní funkci přípojných linek. Soustředí se především na velkokapacitní přepravu. Za účelem dosažení většího počtu přípojných spojů v síti také spolupracují s jinými leteckými dopravci na základě dohod o franchisingu nebo code-share. Flotilu těchto dopravců tvoří velkokapacitní letadla s dlouhým doletem různých typů Boeingu nebo Airbusu a také letadla se středním doletem pro kontinentální přepravu.

2.3.2 Dělení na zahraniční a vnitrostátní dopravce

S délkou přepravy se také pojí vztah sítě vzhledem k hranicím jednotlivých států. Poptávka po letecké dopravě je přímo úměrná vzdálenosti mezi počátečním a koncovým bodem. Pokud by se tedy jednalo o dostatečně velký stát s koupěschopnou silou jeho obyvatel a potřebnou kvalitou infrastruktury pozemní dopravy může letecký dopravce operovat i pouze v rámci tohoto státu.

- a) **Mezinárodní dopravci (international airline)** – destinace obsluhované těmito dopravci leží na území několika států. Pokud to vyžaduje charakter mateřského trhu, obsahuje jejich síť linek i vnitrostátní spoje. Služby na mezinárodních spojích se vyznačují vyšší kvalitou. Cena za přepravu se odvíjí od podmínek konkrétních trhů a regulátorů zúčastněných států. Výjimku v této kategorii stanoví USA, kde se za mezinárodní dopravce považují pouze ti, kteří obsluhují destinace nacházející se mimo USA. V rámci mezinárodní přepravy rozlišujeme krátké, střední a dlouhé/mezinárodní lety (short-haul, medium-haul a long-haul flights).
- b) **Vnitrostátní dopravci (domestic airline)** – rozvíjejí síť linek v rámci svého mateřského státu, čemuž je přizpůsobený i charakter letadlové flotily. Ceny jsou obvykle regulované a nižší v porovnání s mezinárodními linkami o stejné vzdálenosti. Také kvalita nabízeného produktu dosahuje nižší úrovně.

2.3.3 Dělení podle principu nabídky a prodeje přepravních kapacit

- a) **Pravidelné (scheduled)** – soustředí se na přepravu veřejných cestujících a jednotlivcům nabízí lety pod vlastním jménem za veřejné ceny podle pravidelného publikovaného letového řádu. Patří zde jak klasičtí, tak i low-cost a regionální dopravci. Veškerou zodpovědnost za naplnění kapacit spojů nese dopravce. Rozsah sítě linek se odvíjí od velikosti obsluhovaného trhu a kapitálové síly společnosti. Mnoho pravidelných dopravců se za účelem využití svých volných kapacit v neobchodních časech (noční časy nebo zimní období) věnuje také nepravidelné dopravě.
- b) **Nepravidelné (charterové, leisure)** – nabízí lety na objednávku, které se konají pod jménem objednavatele. Většinou se pronajímá celá kapacita letadla. Zákazníky jsou především cestovní kanceláře nebo různé zájmové skupiny cestujících a kluby. Síť těchto dopravců se odvíjí od požadavků klientů, kteří musí vycházet z kapacit a technických možností letadel dopravce. Tento způsob dopravy má výhodu v tom, že klient si koupí určitou kapacitu na daném spoji a pouze on je zodpovědný za její následné naplnění. Letecký dopravce tak veřejně nenabízí svá místa a výnos z takového spoje bude stejný i v případě, kdyby letadlo letělo prázdné. Pokud si však zákazník nekoupí celou kapacitu letadla, může za účelem jeho doobsazení nabízet místa jednotlivcům. Cena přepravy záleží na dohodě mezi dopravcem a objednavatelem. Využívá letadla s větší kapacitou a takovou konfigurací, která nabízí méně pohodlí avšak nižší sedačkovou cenu.

2.3.4 Dělení podle charakteru nabízeného produktu

Tato kategorie se týká pouze pravidelných leteckých dopravců. Je to také nejmladší způsob dělení, který vznikl koncem 20. století, kdy se začaly ve velkém objevovat první nízkonákladové společnosti.

- a) **Klasický (sít'ový) dopravce** – provozují celou síť linek, v rámci které nabízí možnost přestupů nejen na své spoje, ale i na spoje jiných dopravců na základě interline spolupráce. Má vyšší kvalitu produktů v podobě pohodlnějších sedaček a občerstvení během letu zdarma, které definují určitý standart v rámci letecké dopravy. Kapacity na linkách nabízí zejména prostřednictvím sítě cestovních agentur. Mnohdy se klasičtí dopravci také částečně věnují nepravidelné přepravě nebo přepravě zboží a pošty.
- b) **Nízkonákladový dopravce (low-cost - LC dopravce)** – soustředí se na přepravu z bodu do bodu bez možností dalšího přestupu. Jak již s názvů vyplývá, jejich hlavní strategií je minimalizace nákladů, což se na produktu projeví v podobě nižší úrovně pohodlí. Letadla mají takovou konfiguraci sedaček, která umožňuje nabízet více kapacit na lince díky snížení prostoru pro cestující a během letu není podáváno žádné občerstvení. Cena letenek se dynamicky mění s vývojem poptávky. Spoje nízkonákladové společnosti jsou krátké až střední vzdálenosti.

2.3.5 Dělení podle charakteru obchodního vytížení

Letecká doprava původně sloužila především k přepravě pošty. S rostoucí popularitou letecké dopravy se však z pošty stal pouze nejmenší ze tří hlavních typů nákladu klasických dopravců. Až v 70. letech XX. století, s příchodem prvních privátních poštovních společností, se začala přeprava zásilek dostávat znovu do popředí.

- a) **Osobní dopravci** (passenger airlines) – zaměřují se na přepravu cestujících, čemuž přizpůsobují svou flotilu a vybavení letadel. Přepravě zboží a pošty se věnují pouze okrajově. Existují však i dopravci provozující kombinovaná letadla, tedy taková, která umožňují přepravovat větší množství zboží, neboť kabina těchto letadel má dvě části – jednu pro cestující a druhou pro náklad. V situaci, kdy zboží představuje větší podíl přepravy, zakládají dceřiné nákladní společnosti.
- b) **Zbožoví dopravci** (cargo airlines) – tito dopravci přepravují pouze náklad a to jak pravidelnými tak nepravidelnými lety. Jedná se většinou o přepravu zboží na velké vzdálenosti, a proto se jejich síť linek skládá převážně z dálkových spojů. Tomu odpovídá i charakter flotily, která obsahuje letadla se širokým trupem a velkým doletem v nákladním provedení. Pro zjednodušení nakládání a vykládání zboží jsou letadla většinou také schopná převážet palety a kontejnery.
- c) **Zásilkoví dopravci** (integrated nebo courier airlines) – liší se od nákladních dopravců hlavně charakterem přepravy, která je rychlá a uskutečňuje se z domu do domu. Přepravují hlavně menší zásilky, u kterých garantují maximální čas přepravy. Provozují rozsáhlou síť linek, ve které jsou většinou během noci zásilky sváženy nebo rozváženy přípojnými lety do, či z hubu společnosti, odkud jsou následně přepravovány dále návaznými linkami. Pro přepravu využívají malá vrtulová nebo proudová letadla s úzkým trupem na regionální přípojně lety a širokotrupá letadla s velkým doletem v nákladní verzi na dálkovou přepravu či mezikontinentální lety. S příchodem internetu vzrostla i atraktivita služeb díky možnosti sledovat pohyb zásilky online až do místa určení. Zásilková doprava má v současné době obrovský potenciál, čehož je dobrým příkladem společnost Federal Express, která se může pochlubit největším počtem širokotrupých letadel a celkově je její flotila druhá největší na světě.

2.4 Optimální vyžití letadlového parku

Text v této kapitole vychází z literatury [2] a [5]

K tvorbě letového řádu neodmyslitelně patří také výběr a nasazení vhodné techniky na jednotlivá spojení. Letecká společnost musí při tvorbě nových spojů brát v úvahu kapacitní a technické možnosti svého letadlového parku, nebo případně přizpůsobit poptávce jeho složení. Optimální složení letadlové flotily je totiž jeden z nejdůležitějších prvků, který určuje úspěšnost leteckého dopravce. Nasazení letadel s kapacitou větší než je poptávka po spoji a provozování letů s nedostatečným obsazením nabízených kapacit vede k ekonomické ztrátě a v nejhorším případě i ke konkurzu. Výjimkou však může být tzv. „rozlétávání“ nových destinací, kdy se počítá s postupným růstem cestujících na dané lince, což z časového hlediska může probíhat v rámci týdnů, měsíců, ale i let. Je tedy nezbytné počítat s tím, že při zavedení nových spojů nemusí ihned dojít k výnosům a mít k dispozici dostatečnou finanční rezervu, obzvlášť v případě menších dopravců. Nevhodná je však také opačná situace, kdy se letecký dopravce snaží uspokojit poptávku nedostatečnou kapacitou. Omezené množství nabízených spojů totiž může vést k nespokojenosti cestujících a jejich následnému odchodu ke konkurenci. Pro většinu cestujících je podstatným kritériem při volbě letecké společnosti frekvence nabízených spojení a také jejich vhodné časové rozložení. Hlavním cílem leteckého dopravce by tedy mělo být sestavení takového letového řádu, který výše zmíněná kritéria splňuje, a který je tedy pro cestující co nejvíce atraktivní.

V optimálním letovém řádu jsou spoje obsluhovány letadly schopnými pokrýt poptávku po přepravě a jejich sedadlová konfigurace co nejvíce odpovídá požadavkům cestujících. Letový řád je důležitý hlavně z těchto důvodů: představuje nástroj, prostřednictvím něhož jsou distribuovány služby leteckého dopravce a slouží také jako prvek pro alokaci letadel a jejich posádek. Při jeho sestavování je třeba brát v úvahu nejen poptávku po destinacích a požadavky klientů, ale také ekonomické využití letadlové flotily, které zajistí co možná největší zisk. Letový plán musí zabezpečit, že letadla budou přepravovat co největší počet cestujících s maximální možnou frekvencí spojů.

Celkové využití letadel je definováno dvěma faktory. První z nich je, jak často letadlo létá a druhý – kolik cestujících přepravuje. Rozlišujeme tedy dva typy využití: extenzivní a intenzivní.

Extenzivní využívání představuje denní využitelnost letadel, kterou tvoří počet a délka letů v jednom dni. Průměrná hodnota reprezentuje podíl celkového počtu nalétaných hodin za jeden rok a počtu dní v roce. Ta je záporně ovlivněna zejména neefektivními prostoji na letištích a časovými ztrátami, ke kterým dochází při údržbách nebo opravách. Celková využitelnost se liší u letadel na dlouhé a krátké tratě, neboť letadla nasazovaná na krátké trasy tráví na zemi podstatně více času a doba letu je kratší než je tomu u letadel na dlouhých trasách.

Intenzivní využívání je nutno chápat jako procentuální využití sedadlové kapacity nebo nákladového prostoru daného letadla. Jinými slovy reprezentuje, kolik letadlo přepravuje cestujících v porovnání s jeho celkovou kapacitou. Hlavním kritériem intenzivního využívání je tedy vhodná volba letadel s takovou kapacitou, jenž v maximální míře zajistí uspokojení poptávky po konkrétním spoji.

Jak extenzivní tak intenzivní využívání jsou pro leteckého dopravce velmi důležité. Je však třeba také posuzovat vzájemnou vazbu těchto faktorů, neboť vysoký počet frekvencí s prázdným letadlem jakož i plně obsazené lety s nedostatečným denním využitím mají negativní následky v podobě ztrát.

Využití letadlové flotily je ovlivněno zejména:

Počtem letadel leteckého dopravce, který by měl být přizpůsoben počtu spojů v síti.

Množstvím typů letadel. Lepšího využití lze dosáhnout při menším počtu různých letadel. Jednotná flotila představuje lepší možnosti optimalizace z hlediska doletu, spotřeby pohonných hmot či požadavkům na výcvik personálu atd.

Provozními možnostmi. Doba pro uskutečnění spoje může být omezená provozními časy letišť nebo jejich kapacitními možnostmi a také kapacitou letových cest.

Délkou doby obratu, která reprezentuje čas potřebný k výstupu a nástupu cestujících, naložení/vyložení zavazadel, doplnění pohonných hmot či cateringu a vyvážení letadel. Jeho doba závisí hlavně na délce linky a typu letadla, u krátkých a středních tratí činí přibližně 40 minut, u dlouhých kolem 90 až 180 minut.

Strukturou sítě linek. Při větší průměrné přepravní vzdálenosti je vyšší předpoklad pro využití letadel.

Manažerskými a organizačními schopnostmi leteckého dopravce

2.5 Struktura letadlového parku

Text v této kapitole vychází z literatury [2] a[6].

Pro optimální využití letadlového parku je také nezbytné, aby letecká společnost dobře znala charakter a možností svých letadel. Ty se liší v závislosti na typu letadla. Tato kapitola se věnuje rozdělení a popisu nejvíce používaných druhů letadel leteckými dopravci. Obeznamení s charakterem jednotlivých druhů letadel je důležité pro komplexnější pochopení problematiky tvorby letového řádu. Hlavní kritéria, podle kterých je třeba posuzovat nasazení letadla na linku je dolet, typ (popřípadě počet) pohonných jednotek a šířka trupu (kapacita).

2.5.1 Dělení letadel podle typů pohonných jednotek:

- a) **vrtulová** – tato letadla jsou poháněna pístovým motorem. Jejich hlavním nedostatkem je omezená rychlost, která se pohybuje do 500 km/h. S tím je samozřejmě spojen i menší dolet, díky čemuž jsou vrtulová letadla nevhodná pro přepravu na větší vzdálenosti. Další nevýhodou je vysoká hlučnost, která při déle trvajících letech může obtěžovat cestující.
- b) **turbovrtulová** – jedná se o letadla s proudovým motorem, jehož výkon se využívá k pohonu vrtule. Nejvíce se osvědčují v dopravě na kratších vzdálenostech, neboť zde v porovnání s proudovými letadly dosahují lepších ekonomických výsledků, co se týče provozních nákladů. Při větším počtu letů na krátkých linkách jsou méně náročná na údržbu a také na přípravu k letu. Nižší náročnost na údržbu a opravy dovoluje létat do míst s horším technickým zázemím. Další výhodou je, že jsou schopná přistát na kratších dráhách, což umožňuje obsluhu destinací s menšími regionálními či horskými letišti, která jsou pro proudová letadla těžko dostupná. Díky menším kapacitám (od 20 do 70 míst) jsou vhodnější pro linky s nižší frekvencí cestujících, ale vyžadující častější provoz spojů. Jejich úspornější provoz umožňuje vyšší efektivitu linek, na kterých by se v případě proudových letadel nemusely pokrýt ani přímé náklady. Dnes nejvíce používaná turbovrtulová letadla jsou ATR a Bombardier, ale také Saab a Fokker, která se však již nevyrábí.

- c) **proudová** – jak již z názvu vyplývá, jsou tato letadla poháněna proudovými motory, které mají lepší výsledky v poměru výkon – hmotnost. Dosahují vyšších přepravních rychlostí, s čím je spojený i delší dolet. Kapacita největších proudových letadel může činit až 850 míst v případě Airbusu A380, (550 v případě Boeingu 747). Další předností je jejich menší hlučnost poskytující cestujícím větší komfort za letu. Tato letadla jsou tedy vhodná na střední a dlouhé linky s větší poptávkou po přepravě. V současné době se jejich výrobou zabývá pouze evropský Airbus a Americký Boeing. Existují však i společnosti jako Bombardier nebo Embraer, které se soustředí na menší proudová letadla s nižší kapacitou a doletem vhodná pro kratší lety.

2.5.2 Dělení letadel z hlediska kapacity a doletu

Podle uvedeného kritéria lze letadla rozdělit podle kategorie určení na:

- a) **krátké vzdálenosti (s doletem do cca 1 500 km)** – tato letadla jsou vhodná pro lety regionálního charakteru, jejich maximální kapacita se pohybuje kolem 100 míst. Jedná se o turbovrtulová a menší proudová letadla.
- b) **středně dlouhé vzdálenosti (s doletem do 3 500 km)** – kapacita těchto letadel se pohybuje přibližně do 180 cestujících. Vyznačují se vyšší cestovní rychlostí a komfortem. Především jsou to proudová letadla Boeing 737 a několik typů Airbusů.
- c) **dlouhé vzdálenosti (s doletem nad 3 500 km)** – jejich maximální dolet může dosahovat až 13 000 km, díky čemuž se uplatní především při mezikontinentálních letech. Kapacita se pohybuje od 200 osob a výš. Představiteli této kategorie jsou velkokapacitní letadla různých typů Boeingů a Airbusů.

2.5.3 Dělení podle šířky trupu

Poslední kategorie se týká rozdělení v závislosti na šířce trupů, s čím je samozřejmě spojená kapacita letadla. Podle tohoto kritéria dělíme letadla na:

- a) **úzkotrupá (narrow-body aircraft)** – známá také pod pojmem *single-aisle aircraft*, v překladu letadla s jednou uličkou. Šířka trupu o průměru 3 – 4 metry dovoluje maximálně 6 sedadel v jedné řadě. Jde tedy o letadla, která jsou určena pro regionální až středně dlouhé linky.

b) širokotrupá (wide-body aircraft) – jedná se o proudová letadla s velkým doletem a šířkou trupu umožňující vznik dvou uliček v kabině pro cestující, díky čemuž bývají označována i jako *twin-aisle aircraft*. Šířka trupu se pohybuje většinou mezi 5 a 6 metry, v některých případech i více. Konfigurace s nejvyšší hustotou umožňuje až 11 sedaček v řadě a celková kapacita je v rozmezí od 200 do 850 cestujících. Typickými širokotrupými letadly jsou Boeing 747 a Airbus A380. Tato letadla se tedy využívají pro dálkové linky.

3 Návrh matematického modelu

3.1 Existující přístupy k řešení

Tvorbě letového řádu pomocí matematických modelů se v minulosti už věnovaly např. práce [7] a [8]. *Dobson* a *Lederer* ve své práci zkoumali výběr letového řádu a cenotvorbu v síti linek typu Hub and Spoke. Jejich výzkum byl složen ze třech částí. V první části odvodili vztah pro výpočet poptávky po jednotlivých trasách jako funkci kvality služeb a ceny na všech trasách. Ve druhé části práce vytvořili matematický model založený na heuristických metodách, jenž má za úkol nalézt letový řád a ceny, které maximalizují profit leteckých společností oproti pevným letovým řádům a cenám konkurence. V poslední části práce použili heuristiku k vytvoření studie konkurence mezi leteckými dopravci.

Modely, které jsou dále uvedeny, byly vytvořeny zcela nezávisle na těchto pracích.

3.2 Model varianta 1

3.2.1 Formulace problému

Je dána výchozí množina spojů J , ve které každý spoj $j \in J_k$ představuje relaci mezi počáteční a cílovou destinací v časovém intervalu $k \in K$. Protože se intervaly $k \in K$ vzájemně nepřekrývají, je výchozí množina spojů J sjednocením množin spojů v jednotlivých intervalech a lze ji matematicky zapsat ve tvaru $J = \bigcup_{k=1}^m J_k$. Dále je známa poptávka d_j po spoji $j \in J$. K obsluze spojů je vyčleněna množina letadel L , které má letecký dopravce k dispozici. Pro každé letadlo $l \in L$ je definovaná jeho kapacita c_l , reprezentující počet míst v daném letadle.

Pro každý spoj $j \in J$ je znám nejdříve možný čas odletu, označený jako t_j (v uvažovaném případě je tento okamžik totožný se začátkem intervalu $k \in K$). Dále známe čas T_{ij} , který vyjadřuje čas letu spoje $i \in J$ před obsluhou spoje $j \in J$ a maximální dovolený posun odletu spoje $i \in J - t_i^{max}$ v rámci jednoho časového intervalu. Posledními vstupními údaji jsou čas potřebný k obratu letadla před započítáním obsluhy spoje $j \in J$ označený jako t_j^a představující dobu trvání všech činností nezbytných pro započítání návazného spoje (výstup a nástup cestujících, doplnění paliva, atd.) od přiletu letadla

do přestupního uzlu a p_j poplatek za prostož na daném letišti před započítím obsluhy spoje $j \in J$.

V tomto modelu budeme vycházet z předpokladu, že v jednom časovém pásmu můžeme obsluhovat maximálně jeden spoj stejným letadlem.

Úkolem matematického modelu bude vybrat nejlukrativnější spoje $j \in J$ a cílem optimalizace maximálního využití nabízených míst v letadle $l \in L$ na základě poptávky d_j a vytvořit tak z těchto spojů síť linek leteckého dopravce pro každé letadlo $l \in L$ ve zvolené časové periodě (např. jeden den). Matematicky tedy jde o výběr podmnožiny $\bar{J} \subseteq J$.

3.2.2 Řešení

Množinu časových period K zavádíme z důvodu přesnějšího modelování poptávky, kterou je možno chápat nejen jako poptávku po spojích mezi destinacemi, ale i její rozložení v průběhu dne. Celkový počet period si označíme jako m , můžeme tedy říci, že $|K| = m$. Pokud je předpoklad, že existují spojení mezi všemi destinacemi, potom lze celkový počet spojů mezi n destinacemi v m časových periodách určit podle vzorce $n \times (n - 1) \times m$. U časových údajů je nejprve nutné stanovit si okamžik, který nesmí nastat později než začátek prvního časového intervalu (nejlépe pokud se tento čas bude rovnat začátku prvního časového intervalu) a který bude znamenat nulový bod. Časové údaje t_i^o je pak z důvodu snadnějšího modelování v programu Xpress-IVE potřeba transformovat na dobu (v minutách) uplynulou od nulového bodu.

Dalším krokem nezbytným před výpočtem modelu je stanovení hodnot incidenční matice b_{ij} , modelující návaznost spoje $i \in J$ na spoj $j \in J$.

$$b_{ij} = 1 \quad \text{pokud } t_j^o \geq t_i^o + t_{ij} + t_j^a$$

$$b_{ij} = 0 \quad \text{pokud } t_j^o < t_i^o + t_{ij} + t_j^a$$

3.2.3 Rekapitulace konstant

Konstanty

- J výchozí množina spojů
- K množina časových intervalů za zvolenou časovou periodu
- L množina letadel leteckého dopravce
- d_j poptávka po spoji $j \in J$
- c_l kapacita letadla $l \in L$
- y_{jl} počet neobsazených míst v letadle $l \in L$, pokud bude nasazeno k obsluze spoje $j \in J$
- t_i nejdříve možný čas odletu spoje $i \in J$
- T_{ij} doba letu spoje $i \in J$ před obsluhou spoje $j \in J$
- t_j^a turn around time, minimální čas potřebný k obratu letadla před započítáním obsluhy spoje $j \in J$
- t_i^{max} maximální dovolený posun spoje $i \in J$
- M prohibitivní konstanta
- m celkový počet period
- p_j poplatek za prostoj na letišti před započítáním obsluhy spoje $j \in J$
- b_{ij} incidenční matice modelující možnou návaznost spoje $i \in J$ na spoj $j \in J$,
 $b_{ij} \in \{0,1\}$

Proměnné

V tomto modelu se vyskytují dva typy proměnných. První z nich je bivalentní proměnná x_{ijl} , která modeluje nasazení letadla $l \in L$ po obsluze spoje $i \in J$ na spoj $j \in J$. V případě že:

$$x_{ijl} = 1 \quad \text{letadlo } l \in L \text{ bude po obsluze spoje } i \in J \text{ nasazeno k obsluze spoje } j \in J$$

$$x_{ijl} = 0 \quad \text{letadlo } l \in L \text{ po obsluze spoje } i \in J \text{ nebude nasazeno k obsluze spoje } j \in J$$

Druhým typem proměnných jsou nezáporné proměnné z_i , které modelují časový posun spojů $i \in J$ vztahmo k začátkům časových period, ve kterých jsou plánovány.

3.2.4 Matematický model

Za účelem maximalizace nabízených kapacit bude do modelu zaveden pomocný vstupní údaj – počet neobsazených míst v letadle $l \in L$ na spoji $j \in J$, který bude označen jako y_{jl} . Vzhledem ke známým kapacitám letadel a známé poptávce po spojích v jednotlivých pásmech budou mít uvedené veličiny charakter konstant, přičemž hodnota konkrétní konstanty se učí následujícím způsobem:

$$y_{jl} = c_l - d_j \quad \text{pro } d_j \leq c_l \text{ (tzn. pro případy, kdy poptávka } d_j \text{ po spoji } j \in J \text{ nepřekročí kapacitu letadla } l \in L)$$

$$y_{jl} = 0 \quad \text{pro } d_j > c_l \text{ (tzn. pro případy, kdy poptávka } d_j \text{ po spoji } j \in J \text{ překročí kapacitu letadla } l \in L)$$

Účelová funkce musí zajistit maximální využití kapacity letadel. To znamená, že koeficient účelové funkce musí mít takový tvar, který upřednostňuje případy, kdy je počet neobsazených míst nižší před případy, kdy je počet neobsazených míst vyšší. Pokud y_{jl} bude nabývat vysokých hodnot, potom nasazení letadla $l \in L$ na spoj $j \in J$ není z ekonomických důvodů vhodné. Ideální stav nastává, když $y_{jl} = 0$. Z tohoto důvodu se v účelové funkci vyskytuje koeficient $\frac{c_l - y_{jl}}{c_l}$, který výše zmíněné situace modeluje a reprezentuje využití letadel $l \in L$ při nasazení na spoj $j \in J$. Koeficient může nabývat hodnot od 0 po 1. Čím vyšší je hodnota koeficientu, tím vyšší je i hodnota účelové funkce (což je z pohledu optimalizace příznivé neboť hodnota účelové funkce se v modelu bude maximalizovat). Maximální hodnota koeficientu 1 nastává v situacích, kdy je letadlo $l \in L$ plně obsazeno. Pro lepší pochopení této problematiky je dále uvedena tabulka, popisující hodnotu koeficientu v závislosti na vztahu mezi poptávkou d_j a kapacitou letadla c_l .

Situace	y_{jl}	Hodnota koeficientu $\frac{c_l - y_{jl}}{c_l}$
$d_j < c_l$	$c_l - d_j$	$\frac{c_l - c_l + d_j}{c_l} = \frac{d_j}{c_l}$
$d_j = c_l$	$c_l - d_j = 0$	$\frac{c_l}{c_l} = 1$
$d_j > c_l$	0	$\frac{c_l}{c_l} = 1$

Tabulka I: Hodnota koeficientu v závislosti na poptávce a kapacitě letadla

Dalším úkolem účelové funkce je minimalizovat poplatky za pročekanou dobu na letištích. Z tohoto důvodu je do účelové funkce zařazen člen $p_j(t_j^o + z_j - (t_i^o + z_i + t_{ij} + t_{ta}))$ vyjadřující poplatek za pročekanou dobu na letišti po příletu spoje $i \in J$ před započítáním spoje $j \in J$. Díky rozdílu bude tento člen za účelem maximalizace nabývat minimálních hodnot.

Matematický model bude mít tvar:

$$\max f(x, z) = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} \frac{c_l - y_{jl}}{c_l} x_{ijl} - \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} p_j(t_j + z_j - (t_i + z_i + T_{ij} + t_{ta})) \quad (1)$$

za podmínek:

$$x_{ijl} \leq b_{ij} \quad \text{pro } i \in J, j \in J, l \in L \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J_1} x_{0jl} = 1 \quad \text{pro } l \in L \quad (3)$$

$$\sum_{i \in J} \sum_{j \in J} x_{ijl} \leq m \quad \text{pro } l \in L \quad (4)$$

$$\sum_{i \in J} x_{ijl} \leq \sum_{i \in J} x_{jil} \quad \text{pro } i \in J \setminus J_m, l \in L \quad (5)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in L} x_{ijl} \leq 1 \quad \text{pro } i \in J \quad (6)$$

$$t_i + z_i + T_{ij} + t_{ta} \leq t_j + z_j + M(1 - x_{ijl}) \quad \text{pro } i \in J, j \in J, l \in L \quad (7)$$

$$z_i \leq t_i^{max} \quad \text{pro } i \in J \quad (8)$$

$$x_{ijl} \in \{0,1\} \quad \text{pro } i \in J, j \in J, l \in L \quad (9)$$

$$z_i \geq 0 \quad \text{pro } i \in J \quad (10)$$

Vztah (1) představuje účelovou funkci. Podmínky (2) zabezpečují, že do sítě linek nebudou vybrány spoje, které jsou z hlediska návaznosti nepřípustné. Podmínky (3) zabezpečují, že každá síť spojů bude začínat v prvním časovém intervalu a nedojde tak k nežádoucím prostojům letadel na zemi (výraz $j \in J_1$ představuje všechny spoje ležící v prvním časovém intervalu). Podmínky (4) zajišťují, že počet spojů zařazených do oběhů letadel $l \in L$ nepřesáhne počet všech časových intervalů $k \in K$. Podmínky (5) se vztahují k návaznosti spojů v uzlech. Pokud spoj $i \in J$ bude navazovat na spoj $j \in J$, musí být v následujícím časovém intervalu do sítě zařazen stejný spoj $j \in J$. Výraz $i \in J \setminus J_m$ znamená všechny spoje $i \in J$, kromě spojů ležících v posledním časovém intervalu. Na tyto spoje již nenavazují žádné další, a pokud bychom je z podmínky nevyřadili, model by do sítě nezařadil žádný spoj. Podmínky (6) zajišťují, že na každý spoj $i \in J$ bude nasazeno nanejvýš jedno letadlo. Podmínky (7) zabezpečují časovou návaznost spojů a vazbu s proměnnou x_{ijl} . V případě, že doba obsluhy spoje $i \in J$ přesáhne nejdříve možný čas odletu spoje $j \in J$ včetně možných časových posunů, musí být proměnná $x_{ijl} = 0$. Podmínky (8) zajišťují, že časový posun spoje $i \in J$ nepřesáhne maximální možnou hodnotu t_i^{max} . Poslední podmínky (9) a (10) jsou strukturální podmínky a určují definiční obory proměnných.

3.3 Model varianta 2

3.3.1 Formulace problému

Je dána výchozí množina spojů J , ve které každý spoj $j \in J$ představuje relaci mezi počáteční a cílovou destinací. Dále je známa poptávka d_j po spoji $j \in J$. K obsluze spojů je vyčleněna množina letadel L , které má letecký dopravce k dispozici. Pro každé letadlo $l \in L$ je definována jeho kapacita c_l , reprezentující počet míst v daném letadle.

Pro každý spoj $j \in J$ je znám nejdříve možný čas odletu, označený jako t_i . Dále známe dobu letu spoje $i \in J$, označenou jako T_i a čas t_{ij} , potřebný k přesunům mezi spoji $i \in J$ a $j \in J$. Každý spoj $i \in J$ má maximální dovolený posun t_i^{max} v rámci jednoho časového intervalu. Posledním vstupním údajem je t_j^a čas potřebný k obratu letadla před započítáním obsluhy spoje $j \in J$.

Tento model vychází z předpokladu, že v jednom časovém pásmu je možné stejným letadlem obsluhovat více spojů. Jsou zde také umožněny lety bez cestujících za účelem přesunu mezi spoji, pokud se vyskytne taková situace, kdy přesun na spoj s větší poptávkou bude ve výsledku znamenat přepravu více cestujících. V takovém případě by na těchto transferových letech měl letecký dopravce zvážit možnost otevření nových linek.

Úkolem matematického modelu bude vybrat nejlukrativnější spoje $j \in J$ a cílem maximalizace využití nabízených míst v letadle $l \in L$ na základě poptávky d_j a vytvořit tak z těchto spojů síť linek leteckého dopravce pro každé letadlo $l \in L$ ve zvolené časové periodě (např. jeden den).

3.3.2 Rekapitulace konstant

Konstanty

J množina výchozích spojů

L množina letadel leteckého dopravce

d_j poptávka po spoji $j \in J$

c_l kapacita letadla $l \in L$

y_{jl} počet neobsazených míst v letadle $l \in L$, pokud bude nasazeno k obsluze spoje $j \in J$

r_{jl} využití letadla $l \in L$, pokud bude nasazeno k obsluze spoje $j \in J$

t_i nejdříve možný čas odletu spoje $i \in J$

T_i doba letu spoje $i \in J$

t_{ij} doba přesunu mezi spojem $i \in J$ a $j \in J$

t_j^a turn around time, minimální čas potřebný k obratu letadla před započítáním obsluhy spoje $j \in J$

t_i^{max} maximální dovolený posun spoje $i \in J$

M prohibitivní konstanta

Proměnné

V tomto modelu se vyskytují dva typy proměnných. První z nich je bivalentní proměnná x_{ijl} , která modeluje nasazení letadla $l \in L$ po obsluze spoje $i \in J$ na spoj $j \in J$. V případě že:

$x_{ijl} = 1$ letadlo $l \in L$ po obsluze spoje $i \in J$ bude nasazeno na spoj $j \in J$

$x_{ijl} = 0$ letadlo $l \in L$ po obsluze spoje $i \in J$ nebude nasazeno na spoj $j \in J$

Druhým typem proměnných jsou nezáporné proměnné z_i , které modelují časový posun spojů $i \in J$.

Stejně jako v případě předchozího modelu bude i v této variantě zaveden pomocný vstupní údaj – počet neobsazených míst v letadle $l \in L$ na spoji $j \in J$, označen jako y_{jl} (viz str. 33). Pouze koeficient $\frac{c_l - y_{jl}}{c_l}$ reprezentující využití letadel $l \in L$ při nasazení na spoj $j \in J$ je zde nahrazen konstantou r_{jl} . Účelová funkce zajišťuje maximální využití kapacit letadel.

Dále budou pro potřeby modelu zavedeny dvě skupiny bivalentních proměnných. Skupina proměnných $u(j, l)$ a proměnných $v(j, l)$ s následujícím významem. Když proměnná $u(j, l)$ nabude hodnoty 1, znamená to, že k obsluze spoje $j \in J$ bude nasazeno

nové (další) letadlo. To tedy znamená, že daný spoj $j \in J$ bude obsloužen jako první v oběhu daného letadla. Když proměnná $v(j, l)$ nabude hodnoty 1, znamená to, že po obsluze spoje $j \in J$ oběh letadla $l \in L$ končí.

3.3.3 Matematický model

Matematický model bude mít tvar:

$$\max f(x, z) = \sum_{i \in J \cup \{0\}} \sum_{j \in J \cup \{n+1\}} \sum_{l \in L} r_{jl} x_{ijl} \quad (11)$$

za podmínek:

$$\sum_{l \in L} u_{jl} + \sum_{i \in J} \sum_{l \in L} x_{ijl} \leq 1 \quad \text{pro } j \in J \quad (12)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in L} x_{ijl} + \sum_{l \in L} v_{jl} \leq 1 \quad \text{pro } i \in J \quad (13)$$

$$\sum_{j \in J} u_{jl} \leq 1 \quad \text{pro } l \in L \quad (14)$$

$$u_{jl} + \sum_{i \in J} x_{ijl} = v_{jl} + \sum_{j \in J} x_{jil} \quad \text{pro } j \in J, l \in L \quad (15)$$

$$t_i + z_i + t_{ij} + T + t_{ta} \leq t_j + z_j + M(1 - x_{ijl}) \quad \text{pro } i \in J, j \in J, l \in L \quad (16)$$

$$z_i \leq t_i^{\max} \quad \text{pro } i \in J \quad (17)$$

$$x_{ijl} \in \{0, 1\} \quad \text{pro } i \in J, j \in J, l \in L \quad (18)$$

$$z_i \geq 0 \quad \text{pro } i \in J \quad (19)$$

$$u_{jl} \in \{0, 1\} \quad \text{pro } j \in J, l \in L \quad (20)$$

$$v_{jl} \in \{0, 1\} \quad \text{pro } j \in J, l \in L \quad (21)$$

Rovnice (11) reprezentuje účelovou funkci, která vyjadřuje maximalizaci využití letadel na všech spojích zařazených do sítě linek. Skupina omezujících podmínek (12) zajistí, že na každý vybraný spoj bude nasazeno právě 1 letadlo. Skupina omezujících podmínek (13) zajistí, že po obsluze každého vybraného spoje se letadlo přesune „právě jedním směrem“. Skupina omezujících podmínek (14) zajišťuje, že každé letadlo začne v rámci svého oběhu obsluhovat maximálně jeden spoj. Skupina omezujících podmínek (15) zajistí kontinuitu příslušného letadla při zahájení a ukončení obsluhy daného spoje. Skupina omezujících podmínek (16) zajišťuje časovou návaznost jednotlivých spojů a skupina omezujících podmínek (17) definuje přípustné intervaly posunů spojů. Poslední čtyři skupiny podmínek určují definiční obory proměnných použitých v modelu.

4 Výpočetní experimenty

4.1 Modelový příklad

Navržený modelový příklad slouží pouze k ověření funkčnosti modelu. Data týkající se poptávky po spojích jsou zvolena. Délky letů mezi jednotlivými destinacemi byly čerpány z webové stránky <http://www.travelmath.com>, kde je možné zjistit orientační časy letů.

Uvažujme tedy situaci, kdy letecký dopravce chce vytvořit síť linek z následujících spojů znázorněných v tabulce II.

DESTINACE	Časová perioda			
	6:00 - 9:59	10:00 - 13:59	14:00 - 17:59	18:00 - 22:00
FRANKFURT - LONDÝN	1	9	17	25
FRANKFURT - ŘÍM	2	10	18	26
FRANKFURT - BARCELONA	3	11	19	27
LONDÝN - FRANKFURT	4	12	20	28
LONDÝN - ŘÍM	5	13	21	29
ŘÍM - FRANKFURT	6	14	22	30
ŘÍM - LONDÝN	7	15	23	31
BARCELONA - FRANKFURT	8	16	24	32

Tabulka II: Výchozí množina spojů

Očíslování spojů představuje nejen trasu mezi jednotlivými destinacemi, ale také jejich možnou časovou polohu. To je zapříčiněno rozložením poptávky do několika časových period (v modelovém příkladu do čtyř intervalů každého o délce 240 minut). Intenzitu poptávky po spojích v jednotlivých periodách vyjadřuje Tabulka III.

Poptávka [osoby]	Časová perioda			
	6:00 - 9:59	10:00 - 13:59	14:00 - 17:59	18:00 - 22:00
FRANKFURT - LONDÝN	100	150	200	170
FRANKFURT - ŘÍM	80	120	150	130
FRANKFURT - BARCELONA	70	80	120	90
LONDÝN - FRANKFURT	120	160	220	180
LONDÝN - ŘÍM	70	100	170	100
ŘÍM - FRANKFURT	80	110	170	110
ŘÍM - LONDÝN	90	110	190	140
BARCELONA - FRANKFURT	80	90	140	90

Tabulka III: Poptávka po spojích

K obsluze těchto spojů má letecký dopravce k dispozici flotilu skládající se ze dvou letadel o různých kapacitách. Prvním z nich je Boeing 737 – 800 NG s kapacitou 190 míst a druhým Bombardier CRJ 1000 o kapacitě 100 míst [zdroj: <http://aviationsim-game.com/portal.php>].

	Boeing 737 – 800 NG	Bombardier CRJ 1000
Kapacita	190 sedadel	100 sedadel

Tabulka IV: Kapacity letadel

Následující tabulka představuje dobu letu mezi jednotlivými destinacemi, vyjádřenou v minutách.

Doba letu [min]	FRANFURT	LONDÝN	ŘÍM	BARCELONA
FRANFURT	X	80	100	110
LONDÝN	80	X	140	115
ŘÍM	100	140	X	95
BARCELONA	110	115	95	X

Tabulka V: Doba letu mezi jednotlivými destinacemi

Čas potřebný k obratu letadla je v tomto příkladu u všech spojů roven 30 minut. Pro potřeby první varianty modelu je ještě zapotřebí znát poplatky za dobu strávenou na letištích, viz tabulka VI.

	Letiště			
	FRANFURT	LONDÝN	ŘÍM	BARCELONA
Poplatek [Kč/hod]	25000	20000	15000	10000

Tabulka VI: Poplatky za prostoje na letištích

Pro potřeby tvorby a řešení matematického modelu se musí doby letů mezi jednotlivými destinacemi transformovat do konstant typu pole. V případě prvního modelu se jedná o konstanty T_{ij} , vyjadřující dobu letu spoje $i \in J$ před obsluhou spoje $j \in J$ viz Tabulka VII, v případě druhé varianty modelu to jsou konstanty t_{ij} , tedy čas přesunu mezi spoji, viz Tabulka VIII.

		Spoj $j \in J$																																
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
Spoj $i \in J$	1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	80	80	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	2	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	100	100	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	3	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	110	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	4	x	x	x	x	x	x	x	x	80	80	80	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	5	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	140	140	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	6	x	x	x	x	x	x	x	x	100	100	100	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	7	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	140	140	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	8	x	x	x	x	x	x	x	x	110	110	110	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	9	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	80	80	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	10	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	100	100	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	11	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	110	x	x	x	x	x	x	x	x	
	12	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	80	80	80	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	13	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	140	140	x	x	x	x	x	x	
	14	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	100	100	100	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	15	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	140	140	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	16	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	110	110	110	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	17	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	80	80	x	x	
	18	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	100	100	x	
	19	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	110	
	20	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	80	80	80	x	x	x	x	x
	21	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	140	140	x	
	22	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	100	100	100	x	x	x	x	x
	23	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	140	140	x	x	
	24	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	110	110	110	x	x	x	x	x
	25	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	26	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	27	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	28	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	29	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	30	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	31	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	32	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	

Tabulka VII: Doba letu spoje $i \in J$ před obsluhou spoje $j \in J - T_{ij}$

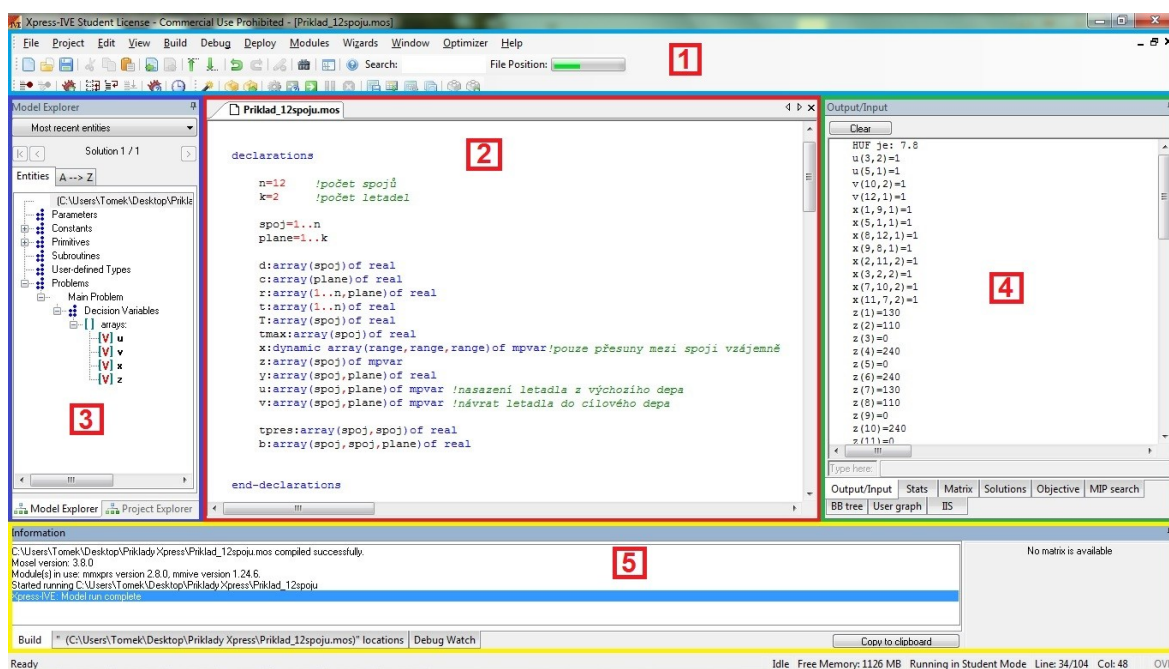
		Spoj $j \in J$																																
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
Spoj $i \in J$	1	x	80	80	0	0	140	140	115	80	80	80	0	0	140	140	115	80	80	80	0	0	140	140	115	80	80	80	0	0	140	140	115	
	2	100	x	100	140	140	0	0	95	100	100	100	140	140	0	0	95	100	100	100	140	140	0	0	95	100	100	100	140	140	0	0	95	
	3	110	110	x	115	115	95	95	0	110	110	110	115	115	95	95	0	110	110	110	115	115	95	95	0	110	110	110	115	115	95	95	0	
	4	0	0	0	x	80	100	100	110	0	0	0	80	80	100	100	110	0	0	0	80	80	100	100	110	0	0	0	80	80	100	100	110	
	5	100	100	100	140	x	0	0	95	100	100	100	140	140	0	0	95	100	100	100	140	140	0	0	95	100	100	100	140	140	0	0	95	
	6	0	0	0	80	80	x	100	110	0	0	0	80	80	100	100	110	0	0	0	80	80	100	100	110	0	0	0	80	80	100	100	110	
	7	80	80	80	0	0	140	x	115	80	80	80	0	0	140	140	115	80	80	80	0	0	140	140	115	80	80	80	0	0	140	140	115	
	8	0	0	0	80	80	100	100	x	0	0	0	80	80	100	100	110	0	0	0	80	80	100	100	110	0	0	0	80	80	100	100	110	
	9	x	x	x	x	x	x	x	x	x	80	80	0	0	140	140	115	80	80	80	0	0	140	140	115	80	80	80	0	0	140	140	115	
	10	x	x	x	x	x	x	x	x	100	x	100	140	140	0	0	95	100	100	100	140	140	0	0	95	100	100	100	140	140	0	0	95	
	11	x	x	x	x	x	x	x	x	110	110	x	115	115	95	95	0	110	110	110	115	115	95	95	0	110	110	110	115	115	95	95	0	
	12	x	x	x	x	x	x	x	x	0	0	0	x	80	100	100	110	0	0	0	80	80	100	100	110	0	0	0	80	80	100	100	110	
	13	x	x	x	x	x	x	x	x	100	100	100	140	x	0	0	95	100	100	100	140	140	0	0	95	100	100	100	140	140	0	0	95	
	14	x	x	x	x	x	x	x	x	0	0	0	80	80	x	100	110	0	0	0	80	80	100	100	110	0	0	0	80	80	100	100	110	
	15	x	x	x	x	x	x	x	x	80	80	80	0	0	140	x	115	80	80	80	0	0	140	140	115	80	80	80	0	0	140	140	115	
	16	x	x	x	x	x	x	x	x	0	0	0	80	80	100	100	x	0	0	0	80	80	100	100	110	0	0	0	80	80	100	100	110	
	17	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	80	80	0	0	140	140	115	80	80	80	0	0	140	140	115	
	18	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	100	x	100	140	140	0	0	95	100	100	100	140	140	0	0	95	
	19	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	110	110	x	115	115	95	95	0	110	110	110	115	115	95	95	0	
	20	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	0	0	0	x	80	100	100	110	0	0	0	80	80	100	100	110	
	21	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	100	100	100	140	x	0	0	95	100	100	100	140	140	0	0	95	
	22	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	0	0	0	80	80	x	100	110	0	0	0	80	80	100	100	110	
	23	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	80	80	80	0	0	140	x	115	80	80	80	0	0	140	140	115	
	24	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	0	0	0	80	80	100	100	x	0	0	0	80	80	100	100	110	
	25	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	80	80	80	0	0	140	140	115
	26	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	100	x	100	140	140	0	0	95	
	27	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	110	110	x	115	115	95	95	0	
	28	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	0	0	0	x	80	100	100	110	
	29	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	100	100	100	140	x	0	0	95	
	30	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	0	0	0	80	80	x	100	110	
	31	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	80	80	80	0	0	140	x	115	
	32	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	0	0	0	80	80	100	100	x	

Tabulka VIII: Doby přesunů mezi spoji - t_{ij}

4.2 Optimalizační software Xpress-IVE

Text v této kapitole vychází z literatury [10]

Pro výpočet optimalizačních úloh je zapotřebí mít vhodný software a dostatečně výkonný počítač. Často se používá například program Xpress-IVE, který byl vytvořen speciálně pro účely matematického programování. Tento software je poměrně jednoduchý a přehledný a základní práci s ním se lze naučit velmi rychle. Na obrázku 9 je vyobrazeno okno programu.



Obrázek 9: Pracovní prostředí programu Xpress-IVE

Pracovní prostředí lze rozdělit do několika částí. V části (1) se nachází uživatelské menu, které obsahuje všechny základní příkazy, např. *Run model*, kterým se zahajuje výpočet úlohy nebo *Compile*, nástroj pro kontrolu zápisu úlohy v programovacím jazyku Mosel. Část (2) slouží k zápisu úlohy do programu. Software Xpress-IVE pracuje s programovacím jazykem Mosel a je tedy zapotřebí úlohu transformovat a zapsat ji do programu v tomto jazyce. V okně (3) se nachází údaje o všech vstupních datech a po ukončení výpočtu zde budou zapsány hodnoty jednotlivých proměnných. Výsledky výpočtu se zobrazují v okně (4), kde v záložce *Output/Input* jsou vypsány všechny výsledné hodnoty, o jejichž výpis bylo v textu programu požádáno. Dále zde můžeme najít údaje o výpočtu v záložce *Stats*, hodnoty všech proměnných v záložce *Solutions*, časový průběh řešení pod záložkou *MIP search* nebo výsledný strom řešení v záložce *BB tree*.

V poli číslo (5) v dolní části obrazovky se vypisují hlášení o chybách a o tom, že model je po syntaktické stránce verifikován.

4.2.1 Transformace úlohy do programovacího jazyka MOSEL

Přepis modelu do programovacího jazyka MOSEL lze rozdělit do několika částí. Na úvod je třeba zařadit deklarační část, ve které mají být inicializovány všechny konstanty typu pole a proměnné, které jsou v modelu použity. Tato část musí být nadepsaná jako *declarations* a následně ukončena příkazem *end-declarations*. Deklarační část pak může mít například následující tvar:

```
declarations

n=12      !počet spojů
k=2       !počet letadel

spoj=1..n
plane=1..k

d:array(spoj)of real
c:array(plane)of real
r:array(1..n,plane)of real
t:array(1..n)of real
T:array(spoj)of real
tmax:array(spoj)of real
x:dynamic array(range,range,range)of mpvar !pouze přesuny mezi
                                           spoji vzájemně

z:array(spoj)of mpvar
y:array(spoj,plane)of real
u:array(spoj,plane)of mpvar !nasazení letadla z výchozího depa
v:array(spoj,plane)of mpvar !návrat letadla do cílového depa

tpres:array(spoj,spoj)of real
b:array(spoj,spoj,plane)of real

end-declarations
```

Pro přehlednost by měl mít text programu určitou strukturu. Je tedy vhodné používat odsazení s ohledem na to, k čemu se text vztahuje, jak je tomu například v uvedené deklarační části. Jednotlivé příkazy se můžou oddělovat mezerou, nebo pomocí symbolu vykřičníku např. *!počet spojů* lze přidat k textu programu komentář. Samotný zápis textu do programu je usnadněn tím, že při vytvoření nového souboru jsou již základní fráze a struktura textu předdefinovány. Konstanty typu pole (veličiny, které jsou v matematickém modelu doplněny indexy) se označují textem *array*, dále následuje text v závorce, kterým definujeme indexy a koncovkou *of real*, tím se určí, že konstanta je z množiny reálných čísel. Analogicky se zapisují i proměnné, pouze s koncovkou *of mpvar*.

Po ukončení deklarační části následuje výpis hodnot všech vstupních údajů podle následujícího schématu:

```
a:=10000
d:=[100,80,120,70,80,90,150,120,160,100,110,110]
tpres:=[a,80,0,0,140,140,80,80,0,0,140,140,
        100,a,140,140,0,0,100,100,140,140,0,0,
        0,0,a,80,100,100,0,0,80,80,100,100,
        100,100,140,a,0,0,100,100,140,140,0,0,
        0,0,80,80,a,100,0,0,80,80,100,100,
        80,80,0,0,140,a,80,80,0,0,140,140,
        a,a,a,a,a,a,a,80,0,0,140,140,
        a,a,a,a,a,a,100,a,140,140,0,0,
        a,a,a,a,a,a,0,0,a,80,100,100,
        a,a,a,a,a,a,100,100,140,a,0,0,
        a,a,a,a,a,a,0,0,80,80,a,100,
        a,a,a,a,a,a,80,80,0,0,140,a]
```

Konstanta a není konstantou typu pole a má tedy pouze jednu hodnotu. V deklarační části bylo určeno, že konstanta d je jednoindexová a vztahuje se k množině *spoj*, která má 12 prvků. Hodnota 100 na první pozici se vztahuje k prvnímu spoji a můžeme si ji představit ve tvaru $d(1) = 100$. Analogicky $d(2) = 80$, atd. Konstanta *tpres* má již dva indexy (*spoj,spoj*) a je třeba ji definovat ve formě matice, kde první index znamená řádek a druhý index sloupec.

V další části textu se definuje soustava omezujících podmínek a účelová funkce. Na začátku podmínky se používá fráze *forall* (), pomocí které určíme, k jakým hodnotám indexů se podmínka vztahuje. Význam této fráze je „pro všechny hodnoty“, které následně definujeme v závorce. Poté již napíšeme konkrétní tvar podmínky. Často se také používá výraz *sum*(), který slouží k označení součtu, pro hodnoty indexů vypsane v závorce. Výsledná podmínka pak má např. takovýto tvar:

```
forall(l in plane)sum(j in spoj)u(j,l)<=1
```

Účelová funkce se zapisuje tak, že je jí nejdříve přiděleno libovolné jméno, např. *HUF* a následně po přiřazovacím příkazu $:=$ se запиše její tvar. Následně se uvede příkaz optimalizace obsahující hledaný typ extrému a název funkce, jejíž extrém je hledán, např. *minimize(HUF)* nebo *maximize(HUF)*.

```
huf:=sum(i in 1..n,j in 1..n,l in plane)r(j,l)*x(i,j,l)
maximize(huf)
```

Na závěr textu programu bývá obvyklé zažádat o výpisy výsledků. To se děje příkazem *writeln* a vhodné kombinace příkazu *forall* a *getsol* nebo *getobjval* v případě

účelové funkce (*getobjval*) a jiných výsledků (*getsol*). Ty se pak zobrazí v již zmíněné záložce *Output/Input*. Text pro vypsání hodnot může vypadat následovně:

```
writeln("HUF je: ",getobjval)

forall(j in spoj,l in
plane|getsol(u(j,l))>0)writeln("u(",j,",",",l,")=",getsol(u(j,l)))
```

První příkaz se vztahuje k vypsání hodnot účelové funkce. Druhým příkazem se požaduje vypsání hodnot proměnných $u(j,l)$, přičemž symbolem $|$ v závorce po frázi *forall* definujeme požadavek na vypsání pouze určitých hodnot, v tomto případě hodnot proměnných $u(j,l)$, větších než 0.

Zápis modelu do programu je nutné ukončit klíčovým slovem *end-model*.

Pokud chce uživatel snížit počet proměnných za účelem zkrácení času výpočtu a snížit tím i nároky na operační paměť nabízí program Xpress-IVE možnost tzv. dynamické proměnné, tedy takové proměnné, která se ve výpočtu bude vyskytovat pouze za určitých okolností. K vytvoření dynamické proměnné je nejdříve zapotřebí v deklarační části příkazem *dynamic array* určit, která proměnná bude tento charakter mít. V případě takovýchto proměnných se místo definice indexu v závorce píše *range* podle tohoto schématu:

```
x:dynamic array(range,range,range)of mpvar
```

V tomto případě se tedy bude jednat o dynamickou proměnnou x se třemi indexy. Dále je pak nutné určit, za jakých okolností se tato proměnná zavede do modelu. K tomu slouží příkazy *if*, *then*, *else*, *end-if* a *create*. Výsledný text může mít např. následující tvar:

```
forall(i in spoj,j in spoj,l in plane)
if(tpres(i,j)=a)
then b(i,j,l):=0
else b(i,j,l):=1
end-if

forall(i in spoj,j in spoj,l in plane|b(i,j,l)=1)create(x(i,j,l))
forall(i in spoj,j in spoj,l in plane)x(i,j,l)is_binary
```

Význam tohoto textu je tedy: pro všechny indexy i v množině *spoj*, j v množině *spoj* a l v množině *plane*, pokud $tpres$ bude roven hodnotě a , potom pomocná konstanta b bude rovná 0. V opačném případě se b bude rovnat 1 a dojde k zavedení proměnné $x(i,j,l)$, která bude nabývat pouze hodnot 0 nebo 1 (fráze *is_binary*).

4.3 Řešení příkladu pomocí modelu č. 1

4.3.1 Zápis modelu č. 1 v programu Xpress-IVE

```
model Destinacni_porfolio_1
uses "mmxprs";

declarations

    n=32
    L=2

    spoj=0..n
    plane=1..L

    y:array(spoj,plane)of real
    d:array(spoj)of real
    c:array(plane)of real
    x:dynamic array(range,range,range)of mpvar
    b:array(spoj, spoj,plane)of real

    t:array(spoj)of integer
    tlet:array(spoj, spoj)of real

    tmax:array(spoj)of real
    M=100000
    a=10000
    z:array(spoj)of mpvar
    P:array(spoj)of real

end-declarations

c::[190,100]

d::[0,100,80,70,120,70,80,90,80,150,120,80,160,100,110,110,90,200,150,
120,220,170,170,190,140,170,130,90,180,100,110,140,90]

t::[-1,0,0,0,0,0,0,0,0,240,240,240,240,240,240,240,240,480,480,480,480,
480,480,480,480,720,720,720,720,720,720,720,720]

tta:=30

tmax::[0,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,
240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240]

P::[0,25000,25000,25000,20000,20000,15000,15000,10000,25000,25000,25000,
20000,20000,15000,15000,10000,25000,25000,25000,20000,20000,15000,15000,1
0000,25000,25000,25000,20000,20000,15000,15000,10000]
```



```

forall(i in spoj,j in spoj,l in plane)
if(tlet(i,j)=a)
then b(i,j,l):=0
else b(i,j,l):=1
end-if

forall(i in spoj,j in spoj,l in plane|b(i,j,l)=1)create(x(i,j,l))

forall(i in spoj,j in spoj,l in
plane|b(i,j,l)=1)t(i)+tlet(i,j)+tta+z(i)<=t(j)+z(j)+M*(1-x(i,j,l))

forall(i in spoj)z(i)<=tmax(i)

forall(j in spoj,l in plane)y(j,l):=c(l)-d(j)

forall(j in spoj,l in plane|y(j,l)<0)y(j,l):=0

forall(l in plane)sum(i in spoj,j in spoj)x(i,j,l)<=4

forall(l in plane)sum(j in spoj)x(0,j,l)=1

forall(i in 1..n)sum(j in spoj,l in plane)x(i,j,l)<=1

forall(j in 1..24,l in plane)sum(i in spoj)x(i,j,l)<=sum(i in
spoj)x(j,i,l)

forall(i in spoj)z(i)>=0

forall(i in spoj,j in spoj,l in plane)x(i,j,l)is_binary

HUF:=sum(i in spoj,j in spoj,l in plane)((c(l)-y(j,l))/c(l))*x(i,j,l)-
sum(i in spoj,j in spoj,l in plane)P(j)*(t(j)+z(j)-
(t(i)+z(i)+tta+tlet(i,j)))

maximize(HUF)

```

```

writeln("HUF je: ",getobjval)

forall(j in spoj,l in plane|getsol(y(j,l))=0)
writeln("y(",j,"","l,")=",getsol(y(j,l)))

forall(j in spoj,l in plane)writeln("Využití(",j,"","l,")=",getsol((c(l)-
y(j,l))/c(l)))

forall(i in spoj)writeln("z(",i,"")=",getsol(z(i)))

forall(i in spoj,j in spoj,l=1|getsol(x(i,j,l))>0)
writeln("x(",i,"","j,","l,")=",getsol(x(i,j,l)))

forall(i in spoj,j in spoj,l=2|getsol(x(i,j,l))>0)
writeln("x(",i,"","j,","l,")=",getsol(x(i,j,l)))

end-model

```

4.3.2 Výstupy z modelu

V zápisu programu Xpress-IVE jsou na konci modelu požadavky na vypsaní výsledků účelové funkce, spojů, na kterých dojde k plnému obsazení letadel, využití letadel při nasazení na jednotlivé spoje, dále vypsaní zvolených spojů a také časových posunů všech spojů. Výstup z modelu v poli *Output/Input* tedy bude vypadat takto:

HUF je: 2.86436e+011	Využití(7,1)=0.473684	Využití(25,2)=1	z(23)=240
y(1,2)=0	Využití(7,2)=0.9	Využití(26,1)=0.684211	z(24)=240
y(4,2)=0	Využití(8,1)=0.421053	Využití(26,2)=1	z(25)=0
y(9,2)=0	Využití(8,2)=0.8	Využití(27,1)=0.473684	z(26)=0
y(10,2)=0	Využití(9,1)=0.789474	Využití(27,2)=0.9	z(27)=0
y(12,2)=0	Využití(9,2)=1	Využití(28,1)=0.947368	z(28)=0
y(13,2)=0	Využití(10,1)=0.631579	Využití(28,2)=1	z(29)=0
y(14,2)=0	Využití(10,2)=1	Využití(29,1)=0.526316	z(30)=240
y(15,2)=0	Využití(11,1)=0.421053	Využití(29,2)=1	z(31)=240
y(17,1)=0	Využití(11,2)=0.8	Využití(30,1)=0.578947	z(32)=240
y(17,2)=0	Využití(12,1)=0.842105	Využití(30,2)=1	x(0,1,1)=1
y(18,2)=0	Využití(12,2)=1	Využití(31,1)=0.736842	x(1,12,1)=1
y(19,2)=0	Využití(13,1)=0.526316	Využití(31,2)=1	x(12,17,1)=1
y(20,1)=0	Využití(13,2)=1	Využití(32,1)=0.473684	x(17,28,1)=1
y(20,2)=0	Využití(14,1)=0.578947	Využití(32,2)=0.9	x(0,4,2)=1
y(21,2)=0	Využití(14,2)=1	z(0)=0	x(4,9,2)=1
y(22,2)=0	Využití(15,1)=0.578947	z(1)=29	x(9,21,2)=1
y(23,1)=0	Využití(15,2)=1	z(2)=0	x(21,31,2)=1
y(23,2)=0	Využití(16,1)=0.473684	z(3)=0	
y(24,2)=0	Využití(16,2)=0.9	z(4)=29	
y(25,2)=0	Využití(17,1)=1	z(5)=0	
y(26,2)=0	Využití(17,2)=1	z(6)=240	
y(28,2)=0	Využití(18,1)=0.789474	z(7)=240	
y(29,2)=0	Využití(18,2)=1	z(8)=240	
y(30,2)=0	Využití(19,1)=0.631579	z(9)=0	
y(31,2)=0	Využití(19,2)=1	z(10)=0	
Využití(0,1)=0	Využití(20,1)=1	z(11)=0	
Využití(0,2)=0	Využití(20,2)=1	z(12)=0	
Využití(1,1)=0.526316	Využití(21,1)=0.894737	z(13)=0	
Využití(1,2)=1	Využití(21,2)=1	z(14)=240	
Využití(2,1)=0.421053	Využití(22,1)=0.894737	z(15)=240	
Využití(2,2)=0.8	Využití(22,2)=1	z(16)=240	
Využití(3,1)=0.368421	Využití(23,1)=1	z(17)=0	
Využití(3,2)=0.7	Využití(23,2)=1	z(18)=0	
Využití(4,1)=0.631579	Využití(24,1)=0.736842	z(19)=0	
Využití(4,2)=1	Využití(24,2)=1	z(20)=0	
Využití(5,1)=0.368421	Využití(25,1)=0.894737	z(21)=0	
Využití(5,2)=0.7		z(22)=240	
Využití(6,1)=0.421053			
Využití(6,2)=0.8			

Obrázek 10: Výstup z programu Xpress-IVE, model č. 1

HUF je výsledná hodnota účelové funkce, tedy součet využití obou letadel na všech vybraných linkách spolu se součtem poplatků za prostoj při časových posunech jednotlivých spojů, $y(j, l)$ představuje počet neobsazených míst letadla l na spoji j . Dalšími údaji jsou využití letadel na konkrétních spojích. Hodnoty $z(j)$ reprezentují časové posuny spojů, jsou vyjádřeny v minutách a jejich hodnoty se pohybují v rozmezí od 0 do 240 v rámci intervalů spojů. Pokud $x(i, j, l) = 1$, znamená to přiřazení konkrétních spojů konkrétnímu letadlu.

4.3.3 Interpretace výsledů

Výstupy z programu lze formulovat jako následující letový řád:

Londýn				
Destinace	Odlet	Přílet	Letadlo	Spoj
Frankfurt	6:29	7:49	Bombardier	4
Frankfurt	10:00	11:20	Boeing	12
Řím	14:00	16:20	Bombardier	21
Frankfurt	18:00	19:20	Boeing	28
Frankfurt				
Destinace	Odlet	Přílet	Letadlo	Spoj
Londýn	6:29	7:49	Boeing	1
Londýn	10:00	11:20	Bombardier	9
Londýn	14:00	15:20	Boeing	17
Řím				
Destinace	Odlet	Přílet	Letadlo	Spoj
Londýn	22:00	0:20	Bombardier	31

Tabulka IX: Výsledný letový řád, model č. 1

Celkový počet přepravených cestujících ve výsledné síti pro konkrétní letadla a pro celou flotilu a také procentuální využití letadel charakterizuje tato tabulka:

	Boeing	Bombardier	Flotila
Teoretický počet přepravených cestujících	630	400	1030
Využití letadla	83%	100%	92%

Tabulka X: Využití letadel ve výsledné síti, model č. 1

4.4 Řešení příkladu pomocí modelu č. 2

4.4.1 Zápis modelu č. 2 v programu Xpress-IVE

```
model Destinacni_porfolio
uses "mmxprs";

declarations

    n=32
    k=2

    spoj=1..n
    plane=1..k

    d:array(spoj) of real
```

```

c:array(plane)of real
r:array(1..n,plane)of real
t:array(1..n)of real
T:array(spoj)of real
tmax:array(spoj)of real
x:dynamic array(range,range,range)of mpvar
z:array(spoj)of mpvar
y:array(spoj,plane)of real
u:array(spoj,plane)of mpvar
v:array(spoj,plane)of mpvar
tpres:array(spoj,spoj)of real
b:array(spoj,spoj,plane)of real

end-declarations

d::[100,80,70,120,70,80,90,80,150,120,80,160,100,110,110,90,200,150,120,2
20,170,170,190,140,170,130,90,180,100,110,140,90]

c::[190,100]

t::[0,0,0,0,0,0,0,0,240,240,240,240,240,240,240,240,480,480,480,480,480,4
80,480,480,720,720,720,720,720,720,720,720]

T::[80,100,110,80,140,100,140,110,80,100,110,80,140,100,140,110,80,100,11
0,80,140,100,140,110,80,100,110,80,140,100,140,110]

tman:=30

tmax::[240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,24
0,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240,240]

a:=10000

M:=100000

tpres::[a,80,80,0,0,140,140,115,80,80,80,0,0,140,140,115,80,80,80,0,0,140,140,115,
100,a,100,140,140,0,0,95,100,100,100,140,140,0,0,95,100,100,100,140,140,0,0,95,
110,110,a,115,115,95,95,0,110,110,110,115,115,95,95,0,110,110,110,115,115,95,95,0,
0,0,0,a,80,100,100,110,0,0,0,80,80,100,100,110,0,0,0,80,80,100,100,110,0,0,0,80,80,100,100,110,
100,100,100,140,a,0,0,95,100,100,100,140,140,0,0,95,100,100,100,140,140,0,0,95,100,100,140,140,0,0,95,
0,0,0,80,80,a,100,110,0,0,0,80,80,100,100,110,0,0,0,80,80,100,100,110,0,0,0,80,80,100,100,110,
80,80,80,0,0,140,a,115,80,80,80,0,0,140,140,115,80,80,80,0,0,140,140,115,80,80,80,0,0,140,140,115,
0,0,0,80,80,100,100,a,0,0,0,80,80,100,100,110,0,0,0,80,80,100,100,110,0,0,0,80,80,100,100,110,
a,a,a,a,a,a,a,80,80,0,0,140,140,115,80,80,80,0,0,140,140,115,80,80,80,0,0,140,140,115,
a,a,a,a,a,a,a,100,a,100,140,140,0,0,95,100,100,100,140,140,0,0,95,100,100,100,140,140,0,0,95,
a,a,a,a,a,a,a,110,110,a,115,115,95,95,0,110,110,110,115,115,95,95,0,110,110,110,115,115,95,95,0,
a,a,a,a,a,a,a,0,0,0,a,80,100,100,110,0,0,0,80,80,100,100,110,0,0,0,80,80,100,100,110,
a,a,a,a,a,a,a,100,100,100,140,a,0,0,95,100,100,100,140,140,0,0,95,100,100,100,140,140,0,0,95,
a,a,a,a,a,a,a,0,0,0,80,80,a,100,110,0,0,0,80,80,100,100,110,0,0,0,80,80,100,100,110,
a,a,a,a,a,a,a,80,80,80,0,0,140,a,115,80,80,80,0,0,140,140,115,80,80,80,0,0,140,140,115,
a,a,a,a,a,a,a,0,0,0,80,80,100,100,a,0,0,0,80,80,100,100,110,0,0,0,80,80,100,100,110,
a,a,a,a,a,a,a,80,80,0,0,140,140,115,80,80,80,0,0,140,140,115,
a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,80,80,0,0,140,140,115,
a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,100,a,100,140,140,0,0,95,100,100,100,140,140,0,0,95,
a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,110,110,a,115,115,95,95,0,110,110,110,115,115,95,95,0,
a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,0,0,0,a,80,100,100,110,0,0,0,80,80,100,100,110,
a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,100,100,100,140,a,0,0,95,100,100,100,140,140,0,0,95,
a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,0,0,0,80,80,a,100,110,0,0,0,80,80,100,100,110,
a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,80,80,80,0,0,140,a,115,80,80,80,0,0,140,140,115,
a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,0,0,0,80,80,100,100,a,0,0,0,80,80,100,100,110,
a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,80,80,0,0,140,140,115,
a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,100,a,100,140,140,0,0,95,
a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,110,110,a,115,115,95,95,0,
a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,0,0,0,a,80,100,100,110,
a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,100,100,100,140,a,0,0,95,
a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,0,0,0,80,80,a,100,110,
a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,80,80,80,0,0,140,a,115,
a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,0,0,0,80,80,100,100,a]

forall(i in spoj,j in spoj,l in plane)
if(tpres(i,j)=a)
then b(i,j,l):=0
else b(i,j,l):=1
end-if

forall(i in spoj,j in spoj,l in plane|b(i,j,l)=1)create(x(i,j,l))

```

```

forall(i in spoj,j in spoj,l in plane)x(i,j,l)is_binary
forall(j in spoj,l in plane)u(j,l)is_binary
forall(j in spoj,l in plane)v(j,l)is_binary
forall(j in spoj,l in plane)y(j,l):=c(l)-d(j)
forall(j in spoj,l in plane|y(j,l)<0)y(j,l):=0
forall(j in spoj,l in plane)r(j,l):=(c(l)-y(j,l))/c(l)
forall(j in spoj)sum(l in plane)u(j,l)+sum(i in spoj,l in
plane)x(i,j,l)<=1
forall(i in spoj)sum(l in plane)v(i,l)+sum(j in spoj,l in
plane)x(i,j,l)<=1
forall(j in spoj,l in plane)u(j,l)+sum(i in spoj)x(i,j,l)=sum(i in
1..n)x(j,i,l)+v(j,l)
forall(l in plane)sum(j in spoj)u(j,l)<=1
forall(i in spoj,j in spoj,l in
plane|b(i,j,l)=1)t(i)+z(i)+T(i)+tman+tpres(i,j)<=t(j)+z(j)+M*(1-x(i,j,l))
forall(i in spoj)z(i)<=tmax(i)

huf:=sum(i in 1..n,j in 1..n,l in plane)r(j,l)*x(i,j,l)

maximize(huf)

writeln("HUF je: ",getobjval)

forall(j in spoj,l in plane|getsol(u(j,l))>0)
writeln("u(",j,",",l,")=",getsol(u(j,l)))

forall(j in spoj,l in plane|getsol(v(j,l))>0)
writeln("v(",j,",",l,")=",getsol(v(j,l)))

forall(i in spoj,j in spoj,l=1|getsol(x(i,j,l))>0)
writeln("x(",i,",",j,",",l,")=",getsol(x(i,j,l)))

forall(i in spoj,j in spoj,l=2|getsol(x(i,j,l))>0)
writeln("x(",i,",",j,",",l,")=",getsol(x(i,j,l)))

forall(i in spoj)writeln("z(",i,")=",getsol(z(i)))

forall(j in spoj,l in plane)writeln("r(",j,",",l,")=",getsol(r(j,l)))

end-model

```

4.4.2 Výstupy z modelu

V zápisu programu Xpress-IVE jsou na konci modelu požadavky na vypsání výsledků účelové funkce, zvolených spojů, časových posunů všech spojů a také využití letadel při nasazení na jednotlivé spoje. Výstup z modelu v poli *Output/Input* tedy bude vypadat takto:

HUF je: 14.0632	z(25)=130	r(19,2)=1
u(4,2)=1	z(26)=110	r(20,1)=1
u(6,1)=1	z(27)=0	r(20,2)=1
v(29,2)=1	z(28)=0	r(21,1)=0.894737
v(31,1)=1	z(29)=240	r(21,2)=1
x(1,12,1)=1	z(30)=0	r(22,1)=0.894737
x(6,1,1)=1	z(31)=240	r(22,2)=1
x(10,22,1)=1	z(32)=0	r(23,1)=1
x(12,10,1)=1	r(1,1)=0.526316	r(23,2)=1
x(17,28,1)=1	r(1,2)=1	r(24,1)=0.736842
x(22,17,1)=1	r(2,1)=0.421053	r(24,2)=1
x(26,31,1)=1	r(2,2)=0.8	r(25,1)=0.894737
x(28,26,1)=1	r(3,1)=0.368421	r(25,2)=1
x(2,14,2)=1	r(3,2)=0.7	r(26,1)=0.684211
x(4,2,2)=1	r(4,1)=0.631579	r(26,2)=1
x(9,20,2)=1	r(4,2)=1	r(27,1)=0.473684
x(14,9,2)=1	r(5,1)=0.368421	r(27,2)=0.9
x(18,30,2)=1	r(5,2)=0.7	r(28,1)=0.947368
x(20,18,2)=1	r(6,1)=0.421053	r(28,2)=1
x(25,29,2)=1	r(6,2)=0.8	r(29,1)=0.526316
x(30,25,2)=1	r(7,1)=0.473684	r(29,2)=1
z(1)=130	r(7,2)=0.9	r(30,1)=0.578947
z(2)=110	r(8,1)=0.421053	r(30,2)=1
z(3)=240	r(8,2)=0.8	r(31,1)=0.736842
z(4)=0	r(9,1)=0.789474	r(31,2)=1
z(5)=0	r(9,2)=1	r(32,1)=0.473684
z(6)=0	r(10,1)=0.631579	r(32,2)=0.9
z(7)=240	r(10,2)=1	
z(8)=0	r(11,1)=0.421053	
z(9)=130	r(11,2)=0.8	
z(10)=110	r(12,1)=0.842105	
z(11)=240	r(12,2)=1	
z(12)=0	r(13,1)=0.526316	
z(13)=0	r(13,2)=1	
z(14)=0	r(14,1)=0.578947	
z(15)=240	r(14,2)=1	
z(16)=240	r(15,1)=0.578947	
z(17)=130	r(15,2)=1	
z(18)=110	r(16,1)=0.473684	
z(19)=240	r(16,2)=0.9	
z(20)=0	r(17,1)=1	
z(21)=0	r(17,2)=1	
z(22)=0	r(18,1)=0.789474	
z(23)=240	r(18,2)=1	
z(24)=0	r(19,1)=0.631579	

Obrázek 11: Výstup z programu Xpress-IVE, model č. 2

HUF reprezentuje hodnotu účelové funkce, tedy součet využití obou letadel na všech vybraných spojih, proměnná $u(j, l)$ s hodnotou 1 udává, že letadlo $l \in L$

obslouží v rámci oběhu jako první spoj $j \in J$ a proměnná $v(j, l)$ s hodnotou 1 spoj $j \in J$, který letadlo $l \in L$ obslouží jako poslední. Pokud $x(i, j, l) = 1$, znamená to, že letadlo $l \in L$ se po obsluze spoje $i \in J$ přesune k obsluze spoje $j \in J$. Hodnoty $z(j)$ reprezentují časové posuny spojů, jsou vyjádřeny v minutách a jejich hodnoty se pohybují v rozmezí od 0 po 240 v rámci přípustných intervalů. Posledními údaji jsou hodnoty $r(j, l)$ udávající využití letadla $l \in L$ při nasazení na spoj $j \in J$ (u těchto veličin jsou vypsány všechny hodnoty, ne tedy pouze ty, kdy k obsluze spoje skutečně dojde).

4.4.3 Interpretace výsledů

Výstupy z programu lze formulovat jako následující letový řád:

Londýn				
Destinace	Odlet	Přílet	Letadlo	Spoj
Frankfurt	6:00	7:20	Bombardier	4
Frankfurt	10:00	11:20	Boeing	12
Frankfurt	14:00	15:20	Bombardier	20
Frankfurt	18:00	19:20	Boeing	28
Řím	22:00	0:20	Bombardier	29
Frankfurt				
Destinace	Odlet	Přílet	Letadlo	Spoj
Řím	7:50	9:30	Bombardier	2
Londýn	8:10	9:30	Boeing	1
Řím	11:50	13:30	Boeing	10
Londýn	12:10	13:30	Bombardier	9
Londýn	16:10	17:30	Boeing	17
Řím	15:50	17:30	Bombardier	18
Řím	19:50	21:30	Boeing	26
Londýn	20:10	21:30	Bombardier	25
Řím				
Destinace	Odlet	Přílet	Letadlo	Spoj
Frankfurt	6:00	7:40	Boeing	6
Frankfurt	10:00	11:40	Bombardier	14
Frankfurt	14:00	15:40	Boeing	22
Frankfurt	18:00	19:40	Bombardier	30
Londýn	22:00	0:20	Boeing	31

Tabulka XI: Výsledný letový řád, model č. 2

Celkový počet přepravených cestujících ve výsledné síti pro konkrétní letadla a pro celou flotilu a také procentuální využití letadel charakterizuje tato tabulka:

	Boeing	Bombardier	Flotila
Teoretický počet přepravených cestujících	1 270	900	2 170
Využití letadla	74%	100%	87%

Tabulka XII: Využití letadel ve výsledné síti, model č. 2

4.5 Studie výpočetního času v závislosti na rozsahu úlohy

Při řešení optimalizačních úloh je kromě samotného výsledku důležitým faktorem také čas výpočtu dané úlohy. Ten v případě rozsáhlých úloh může být neúměrně dlouhý požadovaným výsledkům nebo v případě výkonnostních omezení počítačů může znemožnit řešení dané úlohy. V takových situacích je zapotřebí zvážit požadavek na přesnost výsledků. Například v případě modelů uvedených v této práci, které jsou založeny na základě poptávky a maximalizují naplnění kapacit daného letadla, které představují počet sedadel, není zapotřebí řešit úlohu s přesností v řádech deseti tisícín a rozhodovat se tak na základě obsazení 0,001 sedadla. Optimalizační programy umožňují předem nastavit požadovanou přesnost výsledků, čím je možné výrazně snížit dobu výpočtu.

Na základě těchto úvah je v práci dále zahrnuta studie doby výpočtu úlohy v závislosti na počtu spojů, která vychází z modelu č. 2. Čas výpočtu je kromě počtu spojů také závislý na celkovém počtu podmínek a proměnných, který lze omezit pomocí dynamické proměnné. Rozsah úlohy může být stejný, ale díky dynamické proměnné se sníží počet proměnných (a tím i počet podmínek) a čas výpočtu se zkrátí. Do studie byly zahrnuty úlohy s dynamickou proměnnou a s následujícími rozsahy, viz tabulka XIII.

Rozsah úlohy - počet spojů	12	16	24	28	32
-----------------------------------	----	----	----	----	----

Tabulka XIII: Rozsahy testovaných úloh

Program Xpress-IVE kromě požadovaných výsledků nabízí také možnost zjistit údaje o samotném výpočtu. Ty lze najít v záložce *Stats* v podobě, kde můžeme vyčíst počet podmínek a proměnných v úloze, horní mez řešení (*Best bound*), nejlepší řešení (*Best solution*), jejich vzájemnou odchylku (*Gap*) a také čas výpočtu aj. Následující obrázky znázorňují tyto typy informací získané z provedených optimalizačních výpočtů.

Stats			
Matrix:		Presolved:	
Rows(constraints):	242	Rows(constraints):	202
Columns(variables):	252	Columns(variables):	212
Nonzero elements:	1464	Nonzero elements:	1184
Global entities:	240	Global entities:	200
Sets:	0	Sets:	0
Set members:	0	Set members:	0
Overall status: Finished global search.			
LP relaxation:		Global search:	
Algorithm:	Simplex dual	Current node:	301
Simplex iterations:	76	Depth:	17
Objective:	11.2	Active nodes:	0
Status:	Unfinished	Best bound:	6.37895
Time:	0.0s	Best solution:	6.37895
		Gap:	0%
		Status:	Solution is optimal.
		Time:	1.6s

Obrázek 12: Výpočetní data úlohy s 12 spoji

Stats			
Matrix:		Presolved:	
Rows(constraints):	418	Rows(constraints):	346
Columns(variables):	432	Columns(variables):	360
Nonzero elements:	2624	Nonzero elements:	2120
Global entities:	416	Global entities:	344
Sets:	0	Sets:	0
Set members:	0	Set members:	0
Overall status: Finished global search.			
LP relaxation:		Global search:	
Algorithm:	Simplex dual	Current node:	77
Simplex iterations:	135	Depth:	13
Objective:	14.4	Active nodes:	0
Status:	Unfinished	Best bound:	6.37895
Time:	0.1s	Best solution:	6.37895
		Gap:	0%
		Status:	Solution is optimal.
		Time:	8.5s

Obrázek 13: Výpočetní data úlohy s 16 spoji

Stats			
Matrix:		Presolved:	
Rows(constraints):	818	Rows(constraints):	626
Columns(variables):	840	Columns(variables):	732
Nonzero elements:	5280	Nonzero elements:	4272
Global entities:	816	Global entities:	708
Sets:	0	Sets:	0
Set members:	0	Set members:	0
Overall status:		Finished global search.	
LP relaxation:		Global search:	
Algorithm:	Simplex dual	Current node:	8134
Simplex iterations:	329	Depth:	23
Objective:	22.4	Active nodes:	0
Status:	Unfinished	Best bound:	10.5895
Time:	0.2s	Best solution:	10.5895
		Gap:	0%
		Status:	Solution is optimal.
		Time:	69.9s

Obrázek 14: Výpočetní data úlohy s 24 spoji

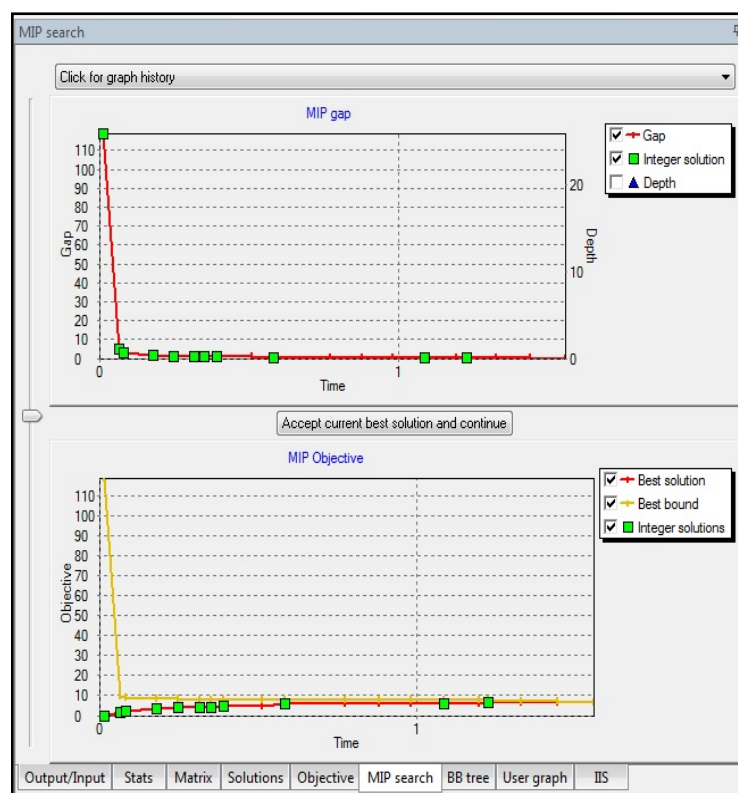
Stats			
Matrix:		Presolved:	
Rows(constraints):	1038	Rows(constraints):	692
Columns(variables):	1064	Columns(variables):	936
Nonzero elements:	6748	Nonzero elements:	5198
Global entities:	1036	Global entities:	908
Sets:	0	Sets:	0
Set members:	0	Set members:	0
Overall status:		Finished global search.	
LP relaxation:		Global search:	
Algorithm:	Simplex dual	Current node:	118897
Simplex iterations:	379	Depth:	27
Objective:	26.6	Active nodes:	0
Status:	Unfinished	Best bound:	14.0632
Time:	0.2s	Best solution:	14.0632
		Gap:	0%
		Status:	Solution is optimal.
		Time:	2474.5s

Obrázek 15: Výpočetní data úlohy s 28 spoji

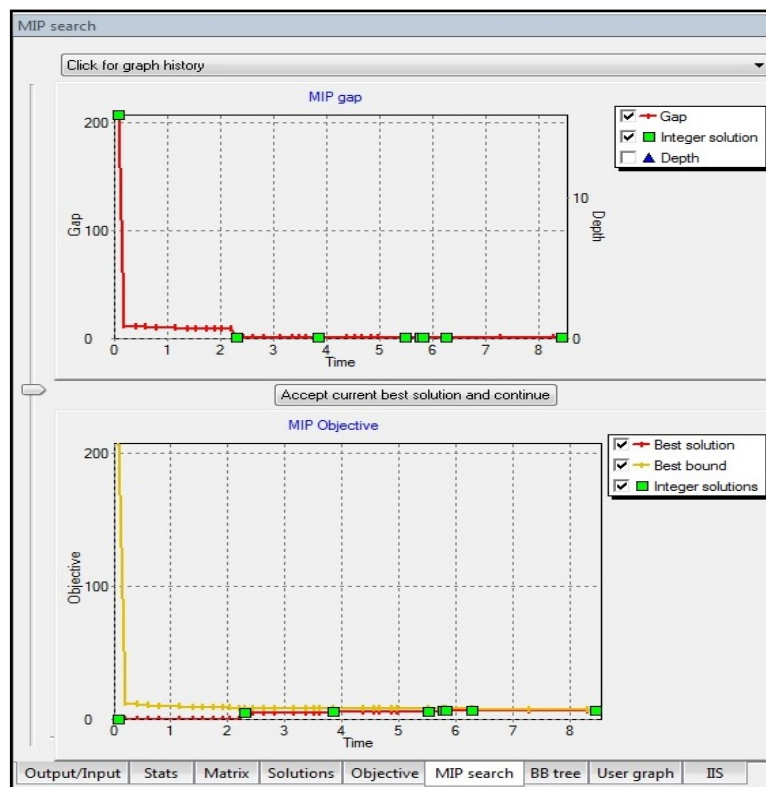
Průběh samotného výpočtu je zobrazen v záložce *MIP search*, kde se nachází dvojice grafů. Graf v dolní části je tvořen dvěma průběhy, kde průběh znázorněn žlutou barvou reprezentuje horní mez řešení v aktuálním čase výpočtu, červený průběh pak nejlepší současné řešení. Optimální řešení nastává tehdy, když se tyto dvě křivky spojí. Horní graf reprezentuje rozdíl mezi horní mezí řešení a současným řešením. Zelené body v grafu označují nalezená celočíselná řešení.

Stats					
Matrix:		Presolved:			
Rows(constraints):	1346	Rows(constraints):	906		
Columns(variables):	1376	Columns(variables):	1232		
Nonzero elements:	8832	Nonzero elements:	6936		
Global entities:	1344	Global entities:	1200		
Sets:	0	Sets:	0		
Set members:	0	Set members:	0		
Overall status:		Finished global search.			
LP relaxation:		Global search:			
Algorithm:	Simplex dual	Current node:	228037		
Simplex iterations:	412	Depth:	39		
Objective:	30.2	Active nodes:	0		
Status:	Unfinished	Best bound:	14.0632		
Time:	0.2s	Best solution:	14.0632		
		Gap:	0%		
		Status:	Solution is optimal.		
		Time:	4318.3s		

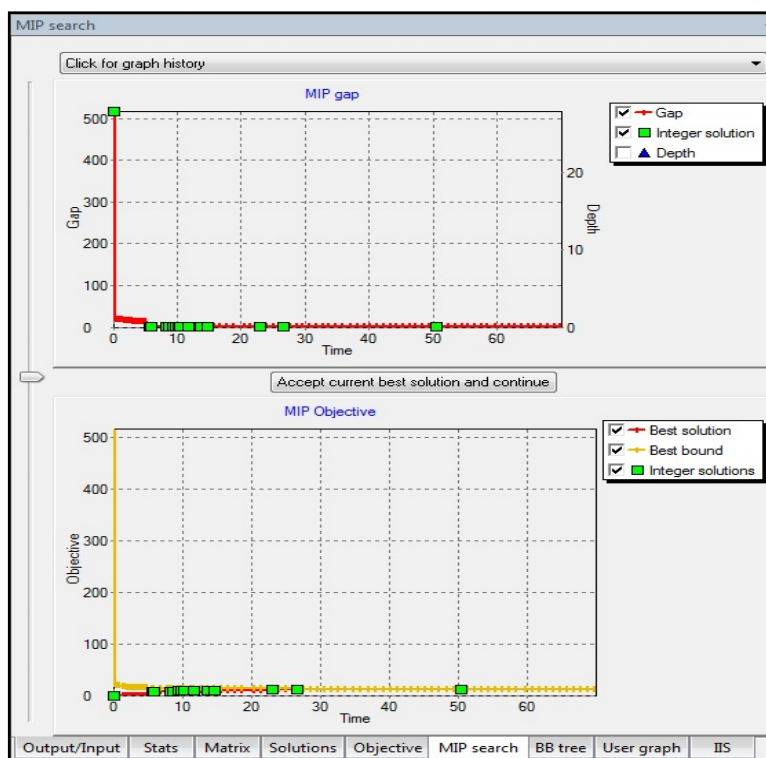
Obrázek 16: Výpočetní data úlohy s 32 spoji



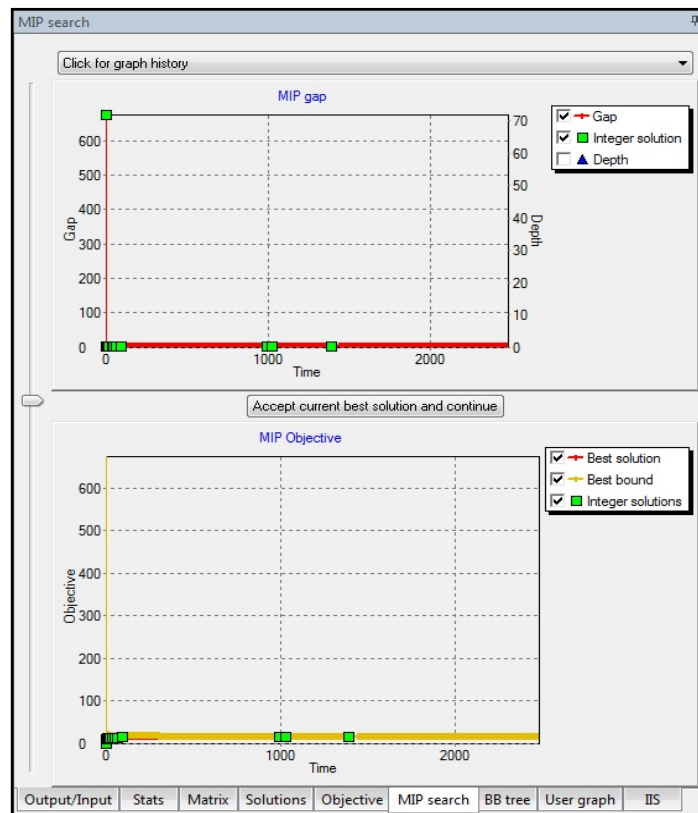
Obrázek 17: Průběh výpočtu úlohy s 12 spoji



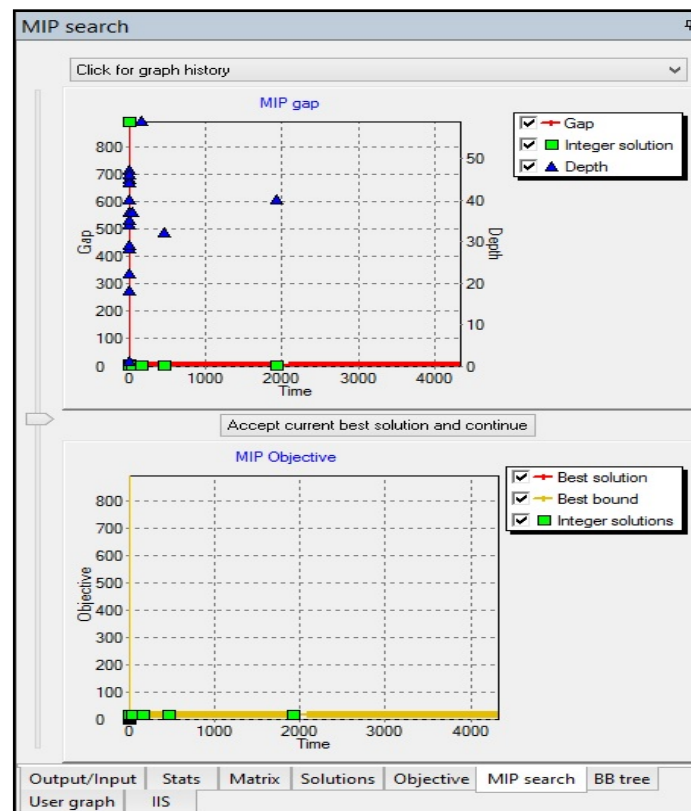
Obrázek 18: Průběh výpočtu úlohy s 16 spoji



Obrázek 19: Průběh výpočtu úlohy s 24 spoji



Obrázek 20: Průběh výpočtu úlohy s 28 spoji



Obrázek 21: Průběh výpočtu úlohy s 32 spoji

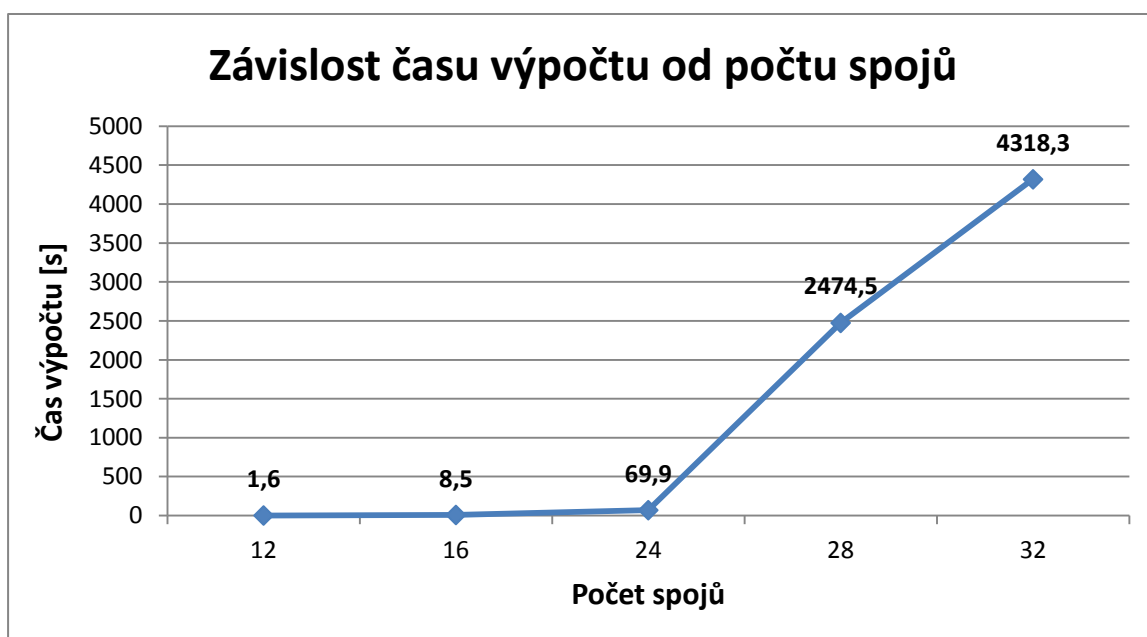
4.5.1 Interpretace výsledků studie

Během testování byly naměřeny hodnoty, které reprezentuje následující tabulka:

Počet spojů	Počet proměnných	Čas výpočtu [s]
12	212	1,6
16	360	8,5
24	732	69,9
28	936	2474,5
32	1232	4318,3

Tabulka XIV: Výsledná data

Ve všech optimalizačních výpočtech bylo dosaženo optimálního řešení. Nejkratší čas výpočtu činil 1,6 s a týkal se úlohy se 12 spoji, která obsahovala 212 proměnných. Nejdelší čas byl naměřen v úloze se 32 spoji a dosáhnul hodnoty 4318,3 s (přibližně 72 minut), přičemž se v modelu nacházelo 1 232 proměnných. Průběh na grafu 1 zachycuje rostoucí čas výpočtu se zvětšujícím se rozsahem úlohy.



Graf 1: Závislost času výpočtu od počtu spojů

5 Závěr

Cílem této diplomové práce bylo vytvořit takový matematický model, který by leteckým dopravcům mohl sloužit jako systém pro podporu rozhodování při tvorbě letového řádu. V práci byly navrženy a detailně popsány dva matematické modely, které na základě známé poptávky a dostupných kapacitách letadlové flotily navrhnou optimální síť spojů. Následně byla ověřena jejich funkčnost na modelovém příkladu. Model č. 2 dosáhl výrazně lepších výsledků, co se týče počtu přepravených cestujících, neboť dovoluje v jednom časovém intervalu uskutečnit více spojů. Model č. 1 sice vykazoval větší procentuální využití flotily, to však bylo podmíněno neefektivními prostoji letadel na letištích a nemožnosti obsloužit v jedné časové periodě více spojů.

Velkým nedostatkem u obou variant byl složitý zápis vstupních údajů týkajících se času přesunu mezi spoji t_{ij} , respektive doby letu spoje $i \in J$ před obsluhou spoje $j \in J - T_{ij}$ v případě varianty č. 1. V úloze, ve které se uvažovalo o vytvoření sítě linek mezi 4 destinacemi, bylo zapotřebí vytvořit matici o velikosti 32 řádků a 32 sloupců. Tento fakt oba modely velmi znevýhodňuje při rozsáhlejších úlohách, neboť zapsání vstupních údajů je časově náročné.

Po ověření funkčnosti modelů následovala studie chování modelu v závislosti na rozsahu dané úlohy. Bylo zjištěno, že od úlohy s rozsahem nad 20 spojů dochází k poměrně rychlému nárůstu výpočetního času.

Pro další využití je vhodnější spíše druhá varianta modelu, kterou je však zapotřebí dále rozpracovat tak, aby co nejlépe vystihovala reálné situace. V současné verzi totiž nejsou zohledněny např. faktory, jako je dolet letadel, jejich různé cestovní rychlosti či omezení týkající se jednotlivých letišť. Dále by v budoucnu bylo vhodné zvážit možnost zapracování penalizace neodvezených cestujících, aby nedošlo k situaci, kdy bude letadlo s malou kapacitou nasazeno na spoj s příliš velkou poptávkou.

Použitá literatura

- [1] ZWAN, J van der. Low-Cost Carriers - Europe, 2006. Anglická verze [online]. Dostupná na WWW: <<http://www.jvdz.net/index2.html>>.
- [2] PRŮŠA, J. a kolektiv. Svět letecké dopravy. Praha: Galileo CEE Service ČR, 2007. 315 s.
- [3] ŽIHLA, Z. a kolektiv. Provozování letecké dopravy a letišť. Brno: Akademické nakladatelství CERM s.r.o., 2010. 301 s.
- [4] GARODIA, P. Introduction to airline networks, 2010. Anglická verze [online]. Dostupná na WWW: <<http://www.slideshare.net/pgarodia/introduction-to-airline-networks#14306632658841&fbinitialized>>.
- [5] HANÁK, P. Analýza plánovania pri výbere lietadlovej techniky, Žilinská univerzita, 2005. 8 s. Slovenská verze [online]. Dostupná na WWW: <<http://fpedas.uniza.sk/dopravaaspoje/2005/1/hanak.pdf>>.
- [6] KŘIVDA, V. Letecká doprava – učební text [online]. Dostupná na WWW: <http://www.elearn.vsb.cz/archivcd/FS/Zdopr/04_LD.pdf>. VŠB-TUO, Ostrava 2007. 51 s.
- [7] KOŘENÝ, P. Globalizace a letecká doprava: strategie středoevropských klasických dopravců: Diplomová práce. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Přírodovědecká fakulta, 2011, 156 s.
- [8] DOBSON, G. a LEDERER, P. Airline Scheduling and Routing in a Hub-and-Spoke System, University of Rochester, New York 1993. 17 s.
- [9] GOPALAN, R. a TALLURI, K. Mathematical models in airline schedule planning: A survey. American Express Corporation, New York a Universitat Pompeu Fabra, Barcelona 1998. 31 s.
- [10] GRAF, V. Optimalizace letového řádu charterového dopravce: Diplomová práce. VŠB-TUO, Ostrava 2014. 68 s.

Seznam obrázků, tabulek a grafů

Obrázek 1: Síť typu point-to-point	13
Obrázek 2: Síť point-to-point se 4 destinacemi	13
Obrázek 3: Síť point-to-point s 5 destinacemi	13
Obrázek 4: Síť typu Hub and Spoke	15
Obrázek 5: Síť Hub and Spoke se 4 destinacemi	15
Obrázek 6: Síť Hub and Spoke s 5 destinacemi	15
Obrázek 7: Síť linek ČSA z roku 2011	16
Obrázek 8: Fáze vývoje sítě linek	20
Obrázek 9: Pracovní prostředí programu Xpress-IVE	44
Obrázek 10: Výstup z programu Xpress-IVE, model č. 1	51
Obrázek 12: Výstup z programu Xpress-IVE, model č. 2	55
Obrázek 13: Výpočetní data úlohy s 12 spoji	58
Obrázek 14: Výpočetní data úlohy s 16 spoji	58
Obrázek 15: Výpočetní data úlohy s 24 spoji	59
Obrázek 16: Výpočetní data úlohy s 28 spoji	59
Obrázek 17: Výpočetní data úlohy s 32 spoji	60
Obrázek 18: Průběh výpočtu úlohy s 12 spoji	60
Obrázek 19: Průběh výpočtu úlohy s 16 spoji	61
Obrázek 20: Průběh výpočtu úlohy s 24 spoji	61
Obrázek 21: Průběh výpočtu úlohy s 28 spoji	62
Obrázek 22: Průběh výpočtu úlohy s 32 spoji	62
Tabulka I: Hodnota koeficientu v závislosti na poptávce a kapacitě letadla	34
Tabulka II: Výchozí množina spojů	40
Tabulka III: Poptávka po spojích	40
Tabulka IV: Kapacity letadel	41
Tabulka V: Doba letu mezi jednotlivými destinacemi	41
Tabulka VI: Poplatky za prostoje na letištích	41
Tabulka VII: Doba letu spoje $i \in J$ před obsluhou spoje $j \in J$ - T_{ij}	42
Tabulka VIII: Doby přesunů mezi spoji - t_{ij}	43
Tabulka IX: Výsledný letový řád, model č. 1	52
Tabulka X: Využití letadel ve výsledné síti, model č. 1	52
Tabulka XI: Výsledný letový řád, model č. 2	56

Tabulka XII: Využití letadel ve výsledné síti, model č. 2	57
Tabulka XIII: Rozsahy testovaných úloh	57
Tabulka XIV: Výsledná data	63
 Graf 1: Závislost času výpočtu od počtu spojů.....	63